

First Day 数列

・数列の分野

- ① 等差数列 $a_n = a_1 + d(n-1)$
- ② 等比数列 $b_n = b_1 r^{n-1} (r \neq 1)$
- ③ 漸化式
- ④ 数列の和 ($\sum$ 計算)
- ⑤ その他 (群数列、数学的帰納法、応用問題)

Point(^ω^)

・数列は難しくない！

Why? ⇒ 高校レベルでは、数列とは「ある決まったルール」に則って定まる数字の列に過ぎない。
したがって部分的な情報があればそのルールを逆に利用することで全体の情報が得られる。
計算は複雑になりがちだが基本を押さえればそれほど難解になることはあまりない。

つまり !! 数列の問題の基本は部分情報から全体の情報を得るということにある! (^ξ^)

そこで大事なのがそれぞれの数列がどれほど情報に自由度があるか、という解釈をもっておくこと。

EX.

- 1. 等差数列 ⇒ a_1 と d が決まれば全体が決まる。⇒ 情報が二つあれば良い。
- 2. 等比数列 ⇒ b_1 と r が決まれば全体が決まる。⇒ 情報が二つあれば良い。
- 3. $a_n = a_{n-1} + 3 \Rightarrow a_1$ が決まれば全体がきまる。⇒ 情報量が 1 つあれば良い。

① 等差数列

全ての情報は基本形 $a_n = a_1 + d(n-1)$ がもつ。
情報量が2つだから2つ等式があれば全てが分かる。
(和の計算は後に回す。)

Q 次の条件をみたす等差数列を求めよ。

(1) $a_1 = 1, d = 3$

(2) $a_1 = 4, a_2 = 7$

(3) $a_4 = 6, a_{10} = 21$

(4) $a_1 + a_3 + a_5 = 4, a_2 + a_4 + a_6 = 10$

(5) k, l は $k < l$ をみたす自然数とする。 $a_k = x, a_l = y$

② 等比数列

全ての情報は基本形 $b_n = b_1 r^{n-1}$ がもつ。

やはり情報量が2つだから2つ等式があれば全てが分かる。

(和の計算は後に回す。)

Q 次の条件をみたす等差数列を求めよ。

(1) $b_1 = 1, b_2 = 3$

(2) $b_1 = 3, b_3 r = -24$

(3) $b_1 + b_2 + b_3 = 16, b_4 + b_5 + b_6 = -2$

(4) $b_3 * b_4 = 18, b_3 + b_4 = -9$ (解は2つある。どちらも求めよ。)

(5) $\{a_n\}, \{b_n\}$ はどちらも等比数列とする。

$$\begin{cases} a_2 + b_1 = 6 \\ a_1 + b_2 = 4 \\ a_1 + 2a_2 = 5 \\ b_1 + 2b_2 = 7 \end{cases}$$

(6) $b_n \geq 0$ とする。

$b_3 = 3^{\frac{2}{3}}, b_5 = 2^{\frac{2}{5}}$

③ 漸化式

理論上は漸化式はいくらでも難しいのを作ることができるが ……

高校のうちは（ま、大学で習う数学を用いても本質的にはあまり変わらないけど）

次のものを出来るようにすれば良い。

逆に言えば次のタイプでない場合は予想して証明するという方法を取る。

Q 次の漸化式を与えられた条件のもとで解け。

ただし漸化式は $n = 1, 2, \dots$ で成り立つとする。

Part.1 解法丸暗記編

$$(1) a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 2$$

以下 m を与えられた自然数とする。

$$(2) a_{n+1} = a_n + 3, a_m = 4$$

$$(3) a_{n+1} = 4a_n, a_1 = 6$$

$$(4) a_{n+1} = 3a_n, a_m = 8$$

$$(5) a_{n+1} = 3a_n + 4, a_1 = 4$$

$$(6) a_{n+1} = 6a_n + 15, a_m = 3m$$

$$(7) a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n, a_1 = 2, a_2 = 3$$

$$(8) a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$$

Part.2 特別解発見形

$$(9) a_{n+1} = 3a_n + 3^n, a_1 = 1$$

$$(10) a_{n+1} = 2a_n + n, a_1 = 1$$

$$(11) a_{n+1} = 3a_n + n^2 - n, a_1 = 2$$

$$(12) a_{n+1} = 2a_n + n + 3^n, a_1 = 4$$

Part.3 その他頻出型

(13)

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \end{cases}$$

$$a_1 = 1, b_1 = 3$$

(14) $a_{n+2} = 3a_n + 4, a_1 = 1, a_2 = -1$

(15) $a_{n+1} = (n+1)a_n, a_1 = 1$

(16) b_n は与えられた数列であるとする。

$$a_{n+1} = a_n + b_n, a_1 = 0$$

(17)

$$a_{n+1} = \sqrt{2} \sin\left(\pi a_n + \frac{\pi}{4}\right), a_1 = 0$$

④ 数列の和

丸暗記しなければならない基本公式は次のもののみ。

暗記！

$$\sum_{k=1}^n a + bk + ck^2 + dk^3 = ak + \frac{b}{2}k(k+1) + \frac{c}{6}k(k+1)(2k+1) + \frac{d}{4}k^2(k+1)^2$$

とくに a_n が等差数列のとき $n > m$ とすれば

$$\sum_{k=m}^n a_k = \frac{a_m + a_n}{2}(n - m + 1)$$

$$\sum_{k=1}^n b_1 r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r} b_1$$

しかし、状況に応じて次のように計算するものもある。

今 $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めたいとしよう。

もし「うまく」変形して $a_n = b_{n+1} - b_n$ となるような b_n を見つけることができれば

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_{k+1} - b_k = b_{n+1} - b_1 \text{ と計算できる。}$$

Q 次の数列の和を計算せよ。

Part.1 素直に計算するタイプ

$$(1) \sum_{k=1}^n 3k + 2$$

$$(2) \sum_{k=n}^{2n} k^2$$

$$(3) \sum_{k=0}^n 3k + 2$$

$$(4) \sum_{k=1}^n 3^k$$

(5) $x > 0, x \neq 0$ とする。

$$\sum_{k=2}^n (\log x)^{k-1}$$

(6) $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1$ のとき。

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

Part.2, 技巧的手法をもちいるもの。

$$(7) \sum_{k=1}^n k3^{k-1}$$

$$(8) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$(9) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

(10) $a_{n+2} = a_n + 4, a_1 = 1, a_2 = 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k$$

⑤ 群数列

着目のポイント

- 1 全体として初項から数えて何番目が $\approx k-1$ 群までに何項含まれているか？
- 2 k 群の満たす条件 (k 群の定義) の確認。 $\Rightarrow k$ 群がどのような性質をもっているか？
- 3 k 群の中で i 番目の数はどういう性質をもっているか？

Q

- 1 . 奇数列を第 k 群が k 個の数を含むように分ける。

1|3, 5|7, 9, 11|13, 15, 17, 19|21, , , , ,

(1) 301 は何群の何番目か？

(2) k 群の i 番目の数を k, i であらわせ。ただし $1 \leq i \leq k$ とする。

- 2 . 次の数列において初項から 100 項までの和を求めよ。

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots$