・翻訳技術

この章で行うのは文字どおり「翻訳」技術の習得である。この翻訳とは初めの章で後回しにしていたのであった。今一度翻訳とは何か整理しておくことにしよう。まず入試数学の問題を解くうえで最初にしなければならないこと、それはその要求が何かを解することであった。「A のとき B を示せ。」だとか「C のとき D を求めよ。」ということもあれば、場「E の時 F であるかどうか？」などと多少曖昧に問うてくることもある。が、いずれもその理解でつかえることは少ないはずである。したがってこの初めの段階については本文では述べない。要は、大事なのはこの後の部分である。それはつまり翻訳、条件処理、回答の段階である。条件処理についてはもうすでに述べた。次の翻訳が主題である。

では翻訳とはどのようなステップなのであろうか。それは初めの段階で提出された課題を受け、そこから適切なツールを選択、条件化することである。このツールは多くの場合高校で習った範囲で扱えるものであることがほとんどであり、たとえば「ベクトル」だとか「漸化式」だとかそういったものが該当する。一方、条件の多くは先の章で学んだ等式、不等式、属性によってあらわされる。したがって翻訳とは、これらの形式に定式化することをいう。さて、この翻訳であるが、出題者側がはじめからツールを選択していたり定式化を導入させていたりすることも多い。そのため、自分で行わなければならない翻訳作業が省略されることもあるのだ。しかしながら、そういった導入があるからと言って自ら思考を捨ててしまってはいけない。当然導入がないこともあるし、自分で翻訳できる力はその導入にうまく合わせていく力にもなるからである。つまり『自分一人の力』で翻訳を完遂しきる力を養わなければならないのである。

さて、問題の解決といったものを考える時に、翻訳作業よりその次に行う条件処理の方が注目を受けやすい。しかしながら、実のところを言えばこの翻訳作業の時点で問題を起こしている場合も多いようである。正確に言うと、かなりいい加減な翻訳作業をしているみたいなのである。後から、「あっそう言えば x は正だったんだっけ」などと言って、前の式に戻ったりした経験はないだろうか。あれ、何でここに戻らなくてはならないのだろう？と思ったことのある諸君もいるかもしれない。かく言う自分もそんなことをしていたわけであるが、この原因の多くは定式化の際の不正確さに依るものである。翻訳作業自体はそれほど難しいようには映らないから、いつまでたってもそこに焦点を当てない。そして、いい加減な定式化がいつまでたっても無くなっていかず「あっまたうっかりミスだ」とか「条件を忘れた！」なんてことになるのである。条件を忘れるのはうっかりミスではない。歴とした判然たるミスである。できる限り翻訳漏れがなくなるような技術を身につけることを心がけよう。

それではさっそく『存在』、『任意』『値域』といった数学における強力な定式化のツールを取得していくことにしよう。そしてそれは先の章で行った「条件の処理」のステップへの足掛かりとなるのである。

・言語表現と式表現

数学の問題を解くとき、普通われわれはまず日本語の文章を読解することから始まる。それは数学という技術を現実の世界の事柄に当てはめたいという動機があるからである。数学の問題だからと言って、ただ数式計算をじっとこなしているのは面白くはないし、大学側も数学の計算ができることより、むしろそれを応用する力の方をみたいのである。たとえば以下のような具合である。

> ex
> 箱の中に 1 から n までの数字が書かれた n 枚のカードがある。
> この箱からカードを k 枚($2 \leq k \leq n$)引く試行について考える。
>
> $n \geq 7$、$k = 3$ とする。
> 引いた三枚のカードを小さい順に並べたときどのカードの差も 3 以上になる確率を求めよ 。

実際この問題の場合、出るカードの情報を数学の式に対応させてしまえば

$$\begin{cases} 0 \leq x, y, z \leq n \\ x + 3 \leq y \\ y + 3 \leq z \\ x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad (*)$$

というだけに過ぎないのであるが、はじめから(∗)の式の形を与えずに上の問題のように出題した方が『おもしろい』のである。つまり、数学力とは計算能力だけでなく**非数学的な事象を数学的存在に対応させる力**も含んだ概念なのである。自分が用いている言葉をもってすれば『翻訳する力』もが数学力の一部をなしているということになる。

ところで非数学的事象を数学的事象に対応させる時、多くの場合それらを媒介するのは『変数』である。身の回りを見渡してみて欲しい。どれもこれも『変化する』ものばかりであろう。先の例のカードの数、太陽の日照時間、安倍首相の短すぎる任期、時刻、どれをとっても常に『変化』している、もしくは『変化』しうるのである。したがって非数学的存在を数学で語ろうとすれば自ずとその変化を表す媒体、つまり変数が必要となってくるのだ。これは中学で数を文字という形で一般化させるようになってからずっと親しんできたものであるからそう理解に難くはなかろう。

すると、ここで一つの疑問が生じてくる。数学では非日常を数式に変換することも求め

られる。それでは物理や化学などの学問とはどこが違うのだろうか？ということである。実はこの疑問は極めて鋭い指摘である。というのも、数学とこれらの学問の間には明確な境界など存在しないからである。では、さっきまで言っていた『ただの計算』のみを行うのが『数学』であると定義することができないか。しかし、そうしてしまうと、また問題が生じる。それは数学の仮定に物理的現象が関わっているからである。例えば、大きいとか小さいとかいう概念は物理的事象から生まれたものではなかったか！では、今その物理的意味をなくすために順番という概念を導入してみることすれば良いのでは？すると今度は順番という概念を導入するために整数という概念が必要とされる。整数とはそもそも自然数、つまり物の個数という概念から生まれたものである。もっと言えばそもそも数字さえもが物理的実体なのである。**簡単に言えばキリがない**のだ。（あんまり適当なことをかくと哲学者に叱られてしまうであろうからこれくらいにしておこう。ぶっちゃけた話自信がないのである…汗）結局のところ、物理を始めとする自然科学と数学の間には明確な境界はないのだ。つまりその差は、**実存を表す程度の問題**でしかない。（数学を真理を探究する学問である、と定義すれば確かにその他の自然科学との明確な境界ができるのかもしれない。しかしながら、そう定義してしまうと今現在「数学」と言われているものは「物理」であるということになってしまうであろうし、そもそも「真理」など人間が探究できるものではない。それは神のみぞ知るということになろう。あっなんだかんだ哲学的なこと、話しちゃってんじゃん！）随分話が逸れてしまった。本題に戻ることにしよう。今からこの言語表現から数学表現への変換、つまり翻訳を学ぶわけであるが、それはつまりどのようにして非数学的事柄を変数に対応させられるかという技術を学ぶということだ。この際の変数の持つ役割には大きく分けて以下のようなものがある。

①条件に対し存在性を要求する場合に、その代表として用いられる変数。
②条件に対し任意性を要求する場合に、その代表として用いられる変数。
③条件に対して何か要求しているわけではなく、単に数字の変わりとして用いられる変数。

①、②の意味は今までの章でたっぷり問題を解いてきたわけだからもういいであろう。③は僕らが普段使っている変数の用いられ方である。こういうのは理論をあれこれ述べるよりは具体的な例を持って実感してもらう方が早いであろうから列挙することにする。

ex　③、単に数字を一般化するために変数が用いられている例。

(1) y=f(x)　 [x,y]

(2)$\sum_{k=1}^{n} k^2$　 [k,n]

(3) $\begin{cases} x+y+2z=2n \\ x,y,z \geq 0 \\ x,y,z \in \mathbb{Z} \end{cases}$　 [x,y,z,n]

などなど。あまり多く書くのも疲れるからこれくらいでも十分であろう。
③の変数の用いられ方に関してはまぁ良い。大事なのは①と②なのである。というのも③とは明らかな違いがあるからであり、別途意識して取り扱わなくてはならないからである。どうやら、これらの使い方をあまり意識していないで処理している人も多いようなので確実な理解ができるようこれから頑張っていこう。

Q

非数学的事象のうち数式として変換することができるものは変換する方法を述べ、変換できないと思うものはその理由を述べよ。(この問題には明確な答えはない。あくまで認識を深めてもらうためのものである。)
(1)机の長さ
(2)犬のキモチ
(3)東京タワーの方角
(4)右という概念
(5)みかんという概念
(6)生きることの価値
(7)今あなたが住んでいる場所の位置。

・条件の翻訳（存在編）

変数が『存在する』とは**無数にある中、探せばどこかにある**ということを表しており、数学の概念の中でも最も重要なものの一つである。実はこの存在という考え方、思っている以上に多くの状況にかかわってくる。今から多くの例を通じてその理解を深めてもらうことになるが、意識してみると相当な量の非数学的存在が変数の存在という形で翻訳されていることが分かるであろう。これは理論より実践。具体的に数式として翻訳してみる練習を行うことにしよう。『A かつ B という条件を満たす x が存在する』ということはもちろん今までのとおり

$$^{\exists}x\begin{cases}A\\B\end{cases}\quad\cdots(*)$$

とかく。

Q 以下の条件を$(*)$の形にならってかけ。この際指定がなければ適宜自分で変数を設定せよ。（以下にでてくる関数 f(x),g(x)は考えている範囲で微分可能であるとする。）

(1)y=f(x)と y=g(x)は xy 平面で交わる。
(2)y=f(x)と y=g(x)は xy 平面上の $a\leq x\leq b$なる領域で交わる。
(3)f(x)=0 は整数解をもつ。
(4)y=f(x)と y=g(x)は xy 平面上で接する。
(5)y=f(x)と y=g(x)は xy 平面上で直交する。
(6)y=f(x)は y=2 になりうる。
(7)x の多項式 f(x)に対し、f(x)=0 は重解をもつ。
(8) 直線 AB と直線 CD が交わる。
(9) 線分 AB と線分 CD が交わる。
(10)n は連続した整数の和でかくことができる。
(11)x,y に関する n 次対称式 f(x,y)は基本対称式 x+y,xy の多項式でかくことができる。
(12)x は有理数である。
(13)f(x,y,z)は 6 という値をとれる。
(14)3 つの頂点が $y=x^2$上にある正三角形が存在する。
(15)4 つの点 $P_k(a_k,b_k)(k=1,2,3,4)$ から成る四角形があり、この四角形は円に内接する。
*(16)$a_kx+b_ky+c_k=0\ (k=1,2,3,4)$の四つの直線とその交点からなる四角形があり、この四角形は円に外接する。
(17)グリコのゲーム[注]で n 段目の段差に上ることができる。
(18)光源 P が(0,0,3)にあり、Q(1,1,1)を中心とした半径 1 の球が xy 平面に影をつくるとする。このとき R(x,y,0)は影となっている点である。

注　グリコのゲームとはじゃんけんをし、グーで勝てば 3 段、チョキで勝てば 6 段、パーで勝てば 6 段それぞれ登り誰が先に階段の上に到達できるかを競うゲームである。

・条件の翻訳（任意編）

　ここでは任意の値について成り立つ。という条件の翻訳について学ぶ。任意の値に対して成り立つというのはもちろん**かなり強い条件**であるから正確な読解をしなくてはならない部分でもある。『A という条件を満たすすべての x に対して B という条件が満たされる』ということを

$^{\forall}x\ A \Rightarrow B$　　（＊＊）

と書くことにしよう。

Q 以下の条件を(＊＊)の形にならって定式化せよ。

(1)$f(x)\geq a$ が言える。

(2)$y=f(x)$と $y=g(x)$は xy 平面上で交わらない。

(3)$y=f(x)=0$ と $y=g(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)$は xy 平面上で同じ形のグラフである。

(4)$a+b+c=0$ を満たす実数 a,b,c に対して

　$(|a|+|b|+|c|)^2\geq 2(a^2+b^2+c^2)$が成り立つ。

(5)

・条件の翻訳（存在、任意融合編）

ここでは今まで行ってきた、存在条件への翻訳、任意条件への翻訳、両者の合わさったものの翻訳練習を行う。ところがこの際問題になってくるのが記号の問題である。というのも存在、任意を表していた記号$\exists,\forall$の順番が重要になってくる例があるからである。そこで混乱を防ぐためにこの章では日本語で翻訳しても良いことにしよう。たとえば(1)の例であれば

(1)回答例

ある実数 M が存在して、$x\in\mathbb{R}$　⇒　$f(x)\leq M$　とすれば良い。

Q 以下の式を上の形にならって翻訳せよ。

(1)$y=f(x)$には最大値が存在する。

(2)$y=f(x)$には最小値が存在する。

(3)$y=f(x)$は y 軸に平行なある直線に関して対称である。

(4)$y=f(x)$はある点に関して対称である。

(5)$y=f(x)$はある直線に関して対称である。

(6)a,b,c は整数である定数とする。x,y,z が整数値をとって動くとき $ax+by+cz$ はあらゆる整数値を取ることができる。

(7)$y=f(x)$,$y=g(x)$は相異なる 2 点で交わる。

**(9)a_nは n→ ∞の時 a に収束する。
**(10)f(x)は x→ ∞の時 a に収束する。
**(11)f(x)は x → ∞の時∞に発散する。
**(12)f(x)は x → ∞の時aに収束する。
**(13)f(x)は極大値をもつ。

・条件の翻訳（その他編）

(1)3 次多項式 P(x)は$x^2 + 4x + 2$で割り切れる。
(2)3 次多項式 P(x)は$x^2 + 4x + 2$で割り切れない。
(3)[x]=k である。(k は整数)