

・ 数学における条件とは

この章では数学における条件の捉え方、そしてそこから生まれる発想についての説明を行う。まず、数学の問題を解くということは何なのか考えてみることにしよう。おそらく次の流れがほとんどなのではないだろうか。つまり、以下のとおりである。

- ①与えられた問題文を理解し要求を確認する。
- ②数学の式に変換する。
- ③与えられた式を整理し簡略化していく。
- ④最も簡略化されたものを答えという形で提出する。

確かに「証明問題」だとか言われているものはこうした流れに則っている訳ではないし、すべての問題がこの流れに沿っているわけではない。これはあくまで説明の都合上のための簡略化されたモデルである。あまり細かいことは気にしない気にしない。(笑)

順に①から④を見ていくことにしよう。まず①は何を聞いているのか解釈する段階である。問題文の設定を読み取り出題者が何を要求しているのかを理解することだ。たとえ数学が苦手な人でもここでつかえてしまう人は多くはない。確かに問題文が何を言っているのかわからないほど難しい問題も無くはないが、大学入試という観点で見れば相当の難問ではない限りそう苦勞するステップではないだろう。

cf. たとえば以下のようなものは理解するだけでも難しい！

C を $y = x^3 - x, -1 \leq x \leq 1$ で与えられる xy 平面上の図形とする。

次の条件を満たす xy 平面上の点 P 全体の集合を図示せよ。

「C を平行移動した図形で、点 P を通り、かつもとの図形 C との共有点がただ一点であるようなものが、ちょうど 3 個存在する。」 (1988 東京大)

上の問題のように大学入試でも理解することが難しい問題もある。しかし多くの場合はそうではない。①の時点でつかえているのならそれは明らかな演習不足である。いわゆる受験常識を知らないと思われるからもう少し数をこなすべきであろう。

さて次に②である。自分はこれを「翻訳」と呼んでいる。問題文で与えられた課題を解決するために、適切なツールを自分で設定し、当てはめ、数式に変換する作業である。この時点でつかえてしまうことは意外に多いがこれは後の章で取り扱う。

最も厄介でありメインテーマとさえ呼べるのが③の与えられた式の整理である。この章の本題である「条件の処理」がこれに該当する。すなわち与えられた条件を整理し、できるだけ簡単な形に変換する作業である。数学の問題のメインはここにあるといっても良い。要は数学の問題は、「どれほどうまく条件を裁くことができるのか」ということを問うてい

るのに過ぎないということである。つまり条件を裁いていく力を養うことこそ数学の力をつけるということなのだ。(チョト言いすぎかな?) さてその条件、主に以下のような形で表現される。

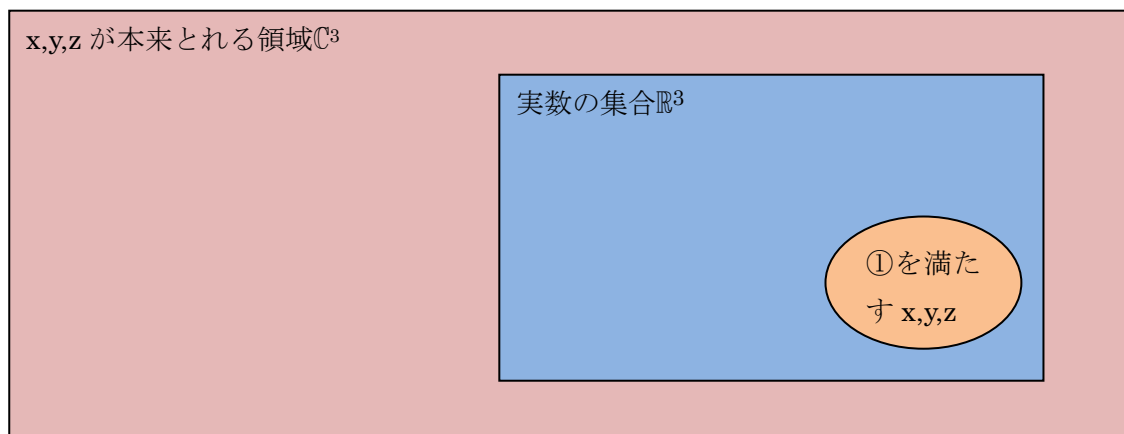
- ①等式 文字どおり等しい式つまり同じ値を持つという条件のことである。
- ②不等式,否定 数字の大小、又は等しくないことを表現する条件である。
- ③属性 与えられた数や要素がもつ属性の条件のことである。たとえば x が実数という属性を持つことを $x \in \mathbb{R}$ などと表現する。

それではこれら条件に共通性質とは何であろうか? つまりもっとかみ砕いて行けば「条件」とは何だろうか?

いきなり答えであるが、条件とは範囲を狭める原因のことである。つまり、本来数多くあるのだが、そのうちのある特徴を満たしているものだけに限定すること、それこそが条件の本質である。①から③のどれもが範囲を限定するという要因になっていることが分かるであろう。たとえば次の条件を考えてもらいたい。

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x, y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

何のことはない、きっと今この瞬間も誰かしらがにらめっこしているであろう、それくらいよく見る式である。そして、この式は数多くある x, y, z という文字をかなり厳しく制限しているのだ。



上の図からも分かるように本来動ける範囲がかなり減ってしまっている。気持ちとしてはもっと小さく書きたいくらいである。中学生までなら①式は x と y と z を足すと 1 になるんですよ。という程度の理解でも構わないかもしれないが高校生はそうではいけない。「 x

と y が定まってしまうと z は自由に値を取れず z が $1-x-y$ として決まってしまうのだよ」
もっと言えば「 x, y, z の値は互いに従属していて数ある x, y, z を一つの式が制限しているのだよ。」と認識しなくてはならない。さて①②③の条件の性質は後で述べることにしてその前に範囲を狭める、つまり制限することの意義を話しておくことにしよう。

数学に限ったことではないのだが、「考える範囲を狭める」ということは問題を解く上での根幹をなす。たとえばひき逃げ事故が起きたとしてその犯人を見つけ出す、という課題が与えられたとしよう。このとき以下の中で最も重要な証言は誰のものであろうか。

A さん：ひき逃げをしたトラックに乗っていた人は茶髪でした。

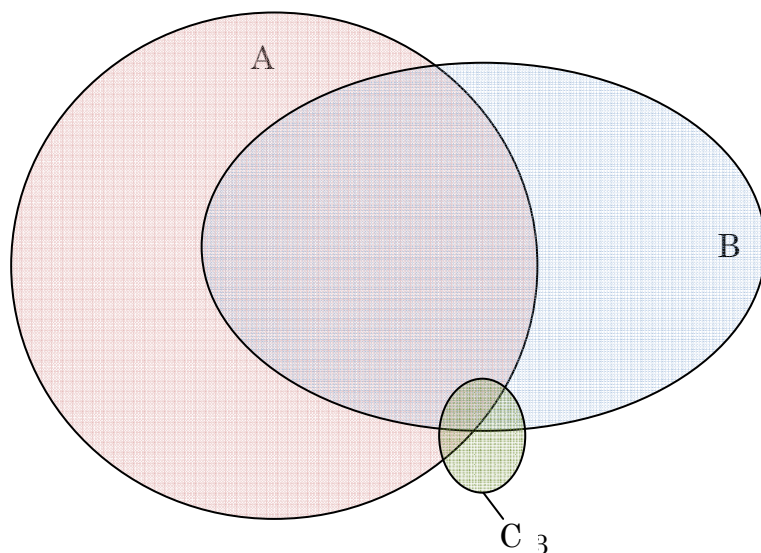
B さん：外で大きな物音がしたのは8時30分でした。

C さん：その事件を起こしたトラックの番号の前半は『ぬ6 5 7 5 4』でした。

言うまでもなく C さんの証言の重要性が突出している。C さんの記憶力も大したものであるが、この証言さえ正しければ他の人の証言など価値もないくらいである。（おっとそれは言い過ぎか）では、この差はどのようにして生まれるのだろうか？そう、C さんの証言は「考える範囲を狭める」ということにおいてもっとも効果的な条件であるのだ。

さて、この C さんの条件のおかげで2人の容疑者が絞り込まれたとする。そこで次に役に立つのが残りの二人の証言だ。B さんの証言を利用して8時30分ごろにアリバイのないほうの人を犯人だと決定すれば良いし、A さんの証言から片方だけ茶髪なら文句なく犯人を断定できる。（まあ現実にはそう簡単ではないのだろうけれど）

ところでこの例だが、重要な洞察が含まれている。それは条件に着目する順番である。もし $A \rightarrow C$ の順で犯人を絞りこんでいくとしたらどれほど大変かは想像に難くはないであろう。茶髪の人など今の時代いくらでもいる。だから茶髪の人を絞りこんでおいてから C の条件で犯人を特定するのは2度出間なのである。



以上の例からも分かるように、一般に範囲を狭める度合いが強いものほど優先順位が高い。つまり先に処理するべきであるということだ。これは数学においても成り立つ。というより数学のほうが顕著にその大切さが際立ってくるといえるかもしれない。したがって数学の問題を解く際は、できるだけ厳しい条件を見極め「考えなければならない範囲」を減らす技術が大きな力となるのである。以後は範囲を減らす能力が高い条件を「強い条件」と表現し、その逆を「弱い条件」と表現することにする。

Q

以下の条件を強い順に並べよ。

(1) ① $x \in \mathbb{R}$ ② $x \in \mathbb{C}$ ③ $x \in \mathbb{Z}$ ④ $x \in \mathbb{Q}$ ⑤ $x = 1$

(2) ① $x \in \mathbb{Z}$ ② $0 \leq x \leq 3$ ③ $x = 2$

(3)

①直線 L は $y = f(x)$ と $x=2$ で接する。②直線 L は $y = f(x)$ と $x=2$ で交わる。

③直線 L は $y = f(x)$ と交点を持つ。

(4) $f(x)$ と $g(x)$ は実数係数を持つ 3 次の多項式であるとする。

① $f(x)$ と $g(x)$ はある一点で接し別のある 1 点で交わる。

② $f(x) - g(x)$ は $(x-2)^2$ でも $(x-3)$ でも割れる

③ $f(2)=0$ かつ $g(2)=0$ である。

(5) A, B, C をある集合とする。

① $x \in \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ ② $x \in \text{or} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ ③ $x \in \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix}$ ④ $x \in \text{or} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix}$ ⑤ $x \in \text{or} \begin{Bmatrix} A \\ \begin{Bmatrix} B \\ C \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$

・条件の強さの認識と自由度

前章では範囲を狭くするということの大切さを学んでもらった。範囲を減らすことの大切さ、及び条件の強さの認識がいかに大切なものであるか分かってもらえたことと思う。さて、この章ではその強さの認識をさらに徹底し、重要な条件を見出すことができるようになることを目標にする。そして新たに「自由度」という考え方を学ぶ。

・等式、不等式の強さ

まず整理しておきたいのは、先ほどから保留していた①から③の条件がもつ性質である。ところで①から③のうち、異質なものがある。それは③だ。というのも、その属性があまりに抽象的すぎてその強さが一概に定まらないからだ。

たとえば $x \in m_3$ と $x \in \mathbb{Z}$ では明らかに前者の方が強いし $x \notin M_{19}$ などといったらほとんど役に立たない。そのため③の強さについては、そのおのこの属性に対して議論しなくては意味をなさない。代表的な属性に関しては後々別々に話をするから、とりあえず今は①②に焦点を絞ることにしよう。

先ほど解いた問題を思い出してもらいたい。等式と不等式では明らかに前者の方が厳しい条件であっただろう。それもそのはず、等式とは寸分たがわずぴったり等しいという情報を表している。不等式の段階ではまだ無限の数だけあった値も等式が一つあるだけでたった一つになってしまう。これ以上に強い条件はないといえよう。つまり数学の問題を解決する際に最初に着目しなければならないのは等式である。問題文の情報を翻訳すれば、種々の式の集合が生まれるわけだが、何を見るより先に意識するのは等式である！文句言わず等式を先に見るがよい！！（笑）しかし、これだけではまだ不十分である。というのも、等式にもいろいろなものがあり複数の等式への対処がまだ明確になっていないからだ。そこで今からいくつかの場合において等式の条件の強さ同士の比較を行うことにしよう。しかし、強さといっても単純ではないから、（先の問題の中に単純に強さを比較できないものがあったのを思い出してほしい。また状況に応じてその強さは変化する。）あくまで一つの捉え方に過ぎないという意識を忘れないでほしい。

①1 次式と 2 次式

御存知のようにある文字（ここでは x にしよう）の 1 次式は 1 つの解があり、2 次式には 2 つの解がある。これは代数学の基本定理と言われるものであり、より一般に「 n 次の定数係数方程式は重解も含めて n 個の複素解をもつ。」という主張である。したがって多項式の中では 1 次式が最も値を制限する力が強いといえる。以上から複数の多項式があった場合はなるべく次数の小さい式に着目するのが得策であるといえる。また、1 次であれば必ず文字を消去できるから、後の進展がある可能性は高い。

②複数の変数が出てくる式

一般に複数の変数が含まれている式よりはなるべく変数の数が少ない式の方が条件が厳しいことが多い。いっぱい文字が含まれている式をみるとうんざりしてしまう君も簡単な式を先に処理すれば良いと言われれば悪い気はしないだろう！

③恒等的に成り立つ式と普通の等式

「どんな値に関しても成り立つ」式のことを恒等式というのであった。この式は極めて強

い条件である。たとえば以下の2つの式を比較してもらいたい。

$$\forall x \begin{cases} y = x^2 + (3 - a)x + 7 \\ y = bx^2 + 5x + c \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \dots \textcircled{1} \quad \exists x \begin{cases} y = x^2 + (3 - a)x + 7 \\ y = bx^2 + 5x + c \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \dots \textcircled{2}$$

①の式はすべての x についてこの式が成り立つという主張である。($\forall$ は any の A をひっくり返して生まれた記号である。 $\forall x$ とは任意の x についてという意味を持つ) 一方②の式は何か x があってその x については②が成り立つという主張である。この差ははるかに大きい。「無限個ある実数 x 対して成り立たなければならない」というのは極めて稀な状態であることは感覚的にも明らかである。実際、上の例では①では (a, b, c) のペアが唯一一つしかないのだが②では無限個あり abc 空間上の領域になってしまう。恒等式が条件として翻訳されることは稀であるが、出てきた場合は相当な「要注目式」という意識を持とう。

これらの例に共通して言えるのは厳しい条件式であればある程「単純な式が多い」ということである(③の例で挙げた $\exists$ と $\forall$ では前者の方がはるかに厄介である。これは問題をこなしていくことでいずれ分かるようになるだろう!)。「単純」というのは完全に主観的な問題であるから捉え方もいろいろあろうがそれでも簡単な式に着目した方がうまくいくというのはどうやら事実であるようだ。

次に不等式及び否定式(こんな日本語無い?)の強さ認識であるが、これらの間にも条件の強さはある。しかしながら、顕著な例を除いて初めから不等式同士の強弱判断が必要になることは少ない。というのも大抵の場合問題から翻訳された条件は等式を含んでいるが、その強さが不等式に比べてあまりに強いため、等式を処理した段階でかなり範囲が限定されてしまうのだ。その後不等式が補助的な役割を担うに留まることが多い。つまり初めの段階では等式の強さのために、不等式の強さの差がいわゆる「五十歩百歩」状態になってしまうのだ。強弱判断は条件の処理の初めの、発想の段階で大きな意味を持つが、等式が優先されるために不等式の強弱判断が発想の起点になることが少ない。そのため不等式の強弱判断はあまり意識せずともよい場合が多い。結局、不等式は強弱判断というよりはむしろ「処理する」といったニュアンスで呼ぶ方が適切なことがメインになってくるであろう。せっかくなので不等式の処理の練習をしておくことにする。

Q 以下の不等式の条件を整理し、1 変数なら数直線上に、2 変数なら平面上に、3 変数なら空間上に図示せよ。

(1)

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(2)

$$\text{or } \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

(4)

$$0 \leq |x| + |y| \leq 1$$

(5)

$$\begin{cases} \text{or } \begin{cases} y \geq x^2 \\ y \geq x^2 - 2x + 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

(5)cf.

$$\begin{cases} y \geq \min\{x^2, x^2 - 2x + 1\} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(6)

$$y \geq (x+1)(x+2)(x-1)(x-2)$$

(7)

(8)

$$\text{or } \begin{cases} \begin{cases} x \leq -1 \\ y \geq x^2 - 4 \\ y \leq x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y \leq x^2 \end{cases} \\ \text{or } \begin{cases} y \geq 1 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases} \end{cases} \quad \min\{x^2, (x-1)^2\} \leq y \leq \max\{x^2, (x-1)^2\}$$

(9)

$$\begin{cases} z \geq x^2 + y^2 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

(10)

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leq 1 \\ 0 \leq x, y, z \end{cases}$$

*(11)

$$[x] + [y] = 2$$

** (12)

$$[x] + 2[y] = 3$$

実数 x に対し $[x]$ は x の整数部分を表す。ただ、こう言ってしまうと x が負の時の定義が不明瞭になってしまうため、普通は「 x を超えない最大の整数」と定義することが多い。

ex. $[3.2] = 3$, $[-9.5] = -10$, $[4] = 4$

・属性の強さ

先ほどからも何度も出てきているように、ある変数の属性を記述する際はその『ある属性』を持つ数の集合を用いて、間接的に表現される場合が多い。確かに x が実数であることを『 $x=\text{実数}$ 』と書いてもわからなくはないのだが通常は $x \in \mathbb{R}$ と表現するのである。まあ表現の仕方はどうでもよい。問題はその属性の強さ認識である。前に述べたように属性の強さについての話は個々の属性に応じて述べなくては意味をなさないから代表的なものを挙げていくことにしよう。なお以下の説明において①から⑤は一般性が高い順、つまり属性としての条件が弱い順に並んでいる。したがって①の属性でなりたつ関係はそれ以後の属性でも成り立つということである。

①複素数であるという属性のもつ条件

複素数全体からなる集合は普通 $\mathbb{C}$ で表現される。これは高校で習う範囲では『数』というものの最も一般的な属性である。すなわち 2 乗して -1 になるという奇怪な数 i と中学生までに学習してきた数、実数を組み合わせて出来る「もの」を複素数という。大学になると四元数だとか、さらに代数的一般化をした数が登場するけれども、今の段階では考える数のうち最も広い概念であるといえる。つまり数を束縛する条件としては最も弱い条件であると言っていい。なお、多くの入試問題において、変数を複素数まで許してしまうと問題として意味をなさなくなってしまうことがほとんどであるため、複素数をはじめてから題材にした問題以外では登場することは少ないであろう。それでも以下の条件は大事であるから忘れないでほしい。

$$(i) \begin{cases} a + bi = c + di \\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(ii) ab=c \Leftrightarrow \text{or} \begin{cases} a \neq 0 \\ b = \frac{c}{a} \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow (ii)' \quad ab=0 \Leftrightarrow \text{or} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

(iii)その他和積の関係

②実数であるという属性の持つ条件

実数全体からなる集合は普通 $\mathbb{R}$ で表現される。これは多くの問題において設定されている変数の条件であり、この条件があるが故に多くの問題が意味のある出題になる。実数であるという特徴は『文字が i を含まない』という条件に他ならないが、そこから生まれてくる重要な帰結、すなわち以下の関係

$$(iv) \quad \begin{cases} x^2 = k \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow k \geq 0$$

が重要な意味を持ってくる。この(iv)がいかに大切であるかは「存在条件の処理」の章で感じることができるであろう。詳細はこの場では述べず後に回す。その他の関係だが、複素数で説明した(i)(ii)(iii)が成り立つほか、大きさの比較、すなわち不等式が意味をもつようになる。不等式に関して以下の(一見アタリマエな)関係が成り立つのだが、これがいかほど重要な関係であるかはやはり後で実感することになろう。

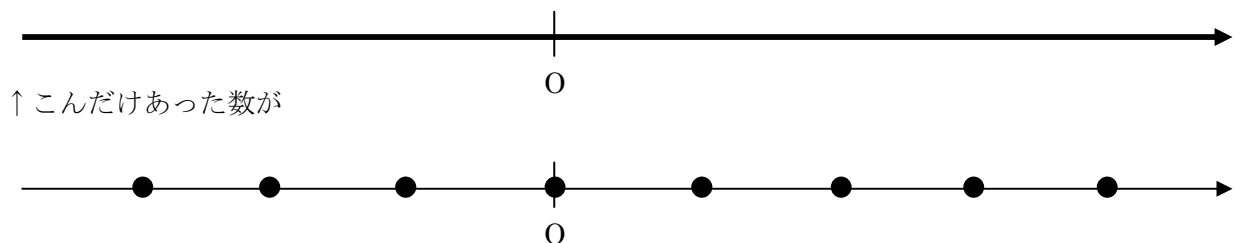
$$(v) \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow a \leq b$$

③有理数であるという属性の持つ条件

有理数全体からなる集合は普通 $\mathbb{Q}$ で表現される。 x が有理数という属性を持っているということは御存知の通り x が、ある互いに素である整数 a, b を用いて $x = a/b$ と書くことができることを意味している。(1 と任意の整数は互いに素であると定義する。)そのため x が絡んだ等式をそっくりそのまま b 倍すれば(複数あるなら、その最小公倍数をかければ)それは左辺、右辺ともに整数の式へと変化することになり、整数問題として取り扱うことができる。よって有理数であるという条件の持つ性質の解説は次の整数という属性の説明で十分であろう。なお特徴的な性質として有理数の緻密性と呼ばれる概念が挙げられるが、これは高校範囲ではあまり意味を持つ特徴とは思えないから省略する。興味があるのなら『デデキントの切断』等調べてみてほしい。

④整数であるという属性の持つ条件

整数全体からなる集合は普通 $\mathbb{Z}$ で表現される。そしてそのうち1以上なもの、つまり自然数全体の集合は $\mathbb{N}$ と表現される。この整数であるという条件、結構とまあ軽視されがちであるが実は非常に強い条件である。それもそのはず、実数であるという条件だけでは



↑ これだけになってしまうのだから。

これだけでも考える範囲はかなり小さくなっていることが分かるが、この重要性は以下の例をもってしてより実感することができる。

$$\begin{cases} 0 < x < 3 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 3 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \dots \textcircled{2}$$

①の式では解が無数にあるため具体的にかくことが出来ない。ところが②で x が整数という条件が加わったことによって無数にあった解が有限の数 $x=1,2$ に収まってしまうのである。これは考える範囲を減らすという観点から見れば実に大きな制限である。確かに整数という条件で絞り込んだ時点ではまだ解の数を有限に抑えられたわけではないのだが、それでも他の条件との兼ね合いによっては、それまで解が無数にあったものを有限数に狭めることがある、ということには注目に値する。さらに整数であるという属性は以下のような特徴をもっている。整数という条件を舐めちゃあいかん！

$$(vi) \begin{cases} z = xy \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow z \in \mathbb{Z}$$

$$(vii) \begin{cases} z \in \mathbb{Z} \\ z \geq 2 \end{cases} \Rightarrow z = p_1 p_2 \cdots p_j (p_k, k=1,2,\dots,j \text{ は素数}) \text{ と唯一 1 通りにかける。}$$

⑤素数であるという属性の持つ条件

素数全体からなる集合を表す記号で普段一般的に用いられている記号はない。そのため問題によっては初めから「 a を素数とする。」という記述がなされていたりする。素数は自然数の一部であり、自分以外の整数で割りきることのできない数のことである。ある数が「素数である」という条件があればその数は④の集合の一部であるということも意味しているため、やはりそれだけでもかなり厳しい条件であると言える。しかし、素数である条件が持つより積極的な利用の一つとしては次の関係が挙げられる。

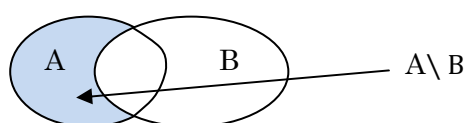
$$(vi)' \begin{cases} z = xy \\ z: \text{素数} \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \text{or} \begin{cases} (x, y) = (z, 1) \\ (x, y) = (1, z) \end{cases}$$

これは(vi)'と書いたように(vi)の条件の一部でしかないが、このように簡明な条件であるが故に入試でもしばしば取り扱われる。より具体的な利用法は整数問題の章で扱うことにする。

⑥無理数であるという属性の持つ条件

x が無理数であるとは $x \in \mathbb{R}$ かつ $x \notin \mathbb{Q}$ であることを意味するがこれはすなわち『 x が互いに素な数の組み合わせ p, q をどんなにうまくとっても $x=p/q$ とは書くことが出来ない』こと

を意味している。この定義は『～と出来ない』という形であるから少々条件の利用が複雑になりがちである。一般に『～という性質があるという条件』より『～という性質がないという条件』の方が扱いづらいことは想像に難くはないであろう。そのため無理数であることの積極的利用法は考えにくく、その逆、つまり『有理数であるとしたら意味をなさない』＝『背理法』での利用がメインになりがちである。ただし、この背理法から導かれた次の定理は積極的に利用される。今無理数の集合を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{Q}$ をひくという意味を込めて $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ と書くことにする。(一般に集合 A の要素から集合 B との共通要素を除いた集合を $A \setminus B$ とかく。しかし理解を妨げるといけないから以後は用いない。)



$$(viii) \quad \begin{cases} a + b = c + d \\ a, c \in \mathbb{Q}, b, d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

⑦ある倍数で割ったあまりで分けた集合の要素がもつ条件

一般的な表現ではないが整数を自然数 k で割ったとき j (j は 0 以上の整数) あまる集合を M_k^j とかく。とくに $j=0$ の時はいちいち書かず省略して M_k ともかく。ところで M_k^j には負の数も含まれるが、負の数を割ったあまりは明瞭には定義されていないのでより厳密には次のように定義する。

$$M_k^j = \{km + j \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

また明らかに整数 n に対して $M_k^j = M_k^{j+nk}$ が成り立つ。(Q 証明せよ！)

さて M_k^j の要素の性質であるが、数多くあるうち、もっとも用いられるのは次の性質である。

$$(ix) \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad n \in M_k^0 \cup M_k^1 \cup \dots \cup M_k^{k-1}$$

$$(x) \quad \begin{cases} n \in M_k^i \\ m \in M_k^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \pm m \in M_k^{i \pm j} \\ nm \in M_k^{ij} \end{cases}$$

$$(xi) \quad n \in M_k^j \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-j}{k} \in \mathbb{Z}$$

これらの関係はあまりピンとこないであろうし、非常にみにくい(実際打つのだって大変だ

った！笑)。これは合同式というとらえ方によってより明確な形で定式化される。取り敢えず今のところはふーんと思う程度でも OK。後に理解してもらっても十分だ。それでも余裕があるのなら理解を試みよ！さらには(ix)(x)(xi)を示してみよ！

・変数の自由度

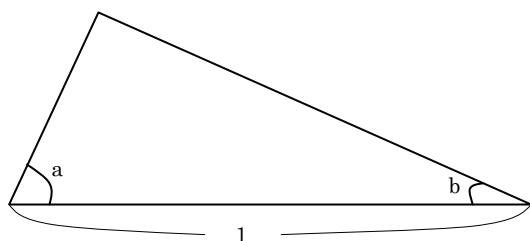
さてやっとのことで代表的な属性のもつ条件の説明が終了した。続いては、これもまた数学的理解の上では必要不可欠な『自由度』という考え方のお話である。これは、数学の発想という点でも大きな意味を持ってくる考え方であるから是非とも理解してほしい。まず、『自由度』の説明のために変数について話しておかねばならない。何を今更と思うかもしれないが『変数』の確実な理解が『自由度』の説明には必要なのである。変数とは確かに『変わることのできる数』という数なのであるが、それは大きく二つに分けることができる。1つは本来の『変数』という言葉がもつ意味の変数であり積極的に「変われる数」である。たとえば次のものはどれもこの意味で変数である。

ex 純的な変数という言葉の使用例

(1) $y=f(x)$ の x

(2)「暗証番号を記入してください。」の暗証番号

(3)下の三角形の角 a, b



(4)「平面上の定点 P に対し、 Q が $PQ=1$ を満たして動くこのとき次の問いに答えよ。」というここまでの一文で判断した時の Q の位置。

(5)「周の長さが x で面積が y の三角形を考える」というときの x, y

*(6)「 xy 平面において、点 A は原点 O を中心とする半径 1 の円周の第一象限にある部分を動き、点 B は x 軸上を動く。ただし線分 AB の長さは 1 であり、線分 AB は両端 A, B 以外の点 C で円周と交わるものとする。

(i) $\theta = \angle AOB$ の取りうる値の範囲を求めよ。

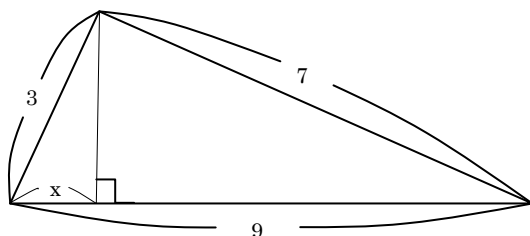
(ii) BC の長さを θ で表せ。

(iii) 線分 OB の中点を M とする。 θ が (1) で求めた範囲を動くとき CM の長さの範囲を求めよ。(1982 東大)」の θ 。

これらの解説は置いておくことにして、もう一つの変数の例を挙げてみるようにしよう。

ex 非純的な変数の使用例

(7)「下の三角形で図の長さを x と置くと」の x



(8)「 $x^2 + 3x - 4 = 0$ 」の x

(9)「 xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

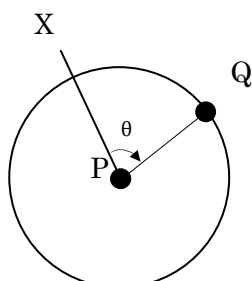
$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 PQ を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。このとき a の長さを求めよ。(2004 東大)」の a

どうだろう、だいたい意味がわかったのではなかろうか。純粋な意味での変数はまあよいだろう。「変わることができる」という意味において(1)から(6)はみな変数なのである。ところが後者の例を見てもらいたい。まず(7)であるが、この三角形は長さがすべて決まっているから形が決まっている三角形である。そのために、図の辺の長さを x と置いたところで、その長さそのものはすでに定まった値であることに変わりはない。だから文字をあたかも変数かのようにおいてはいるのだが、その値は変わることが出来ないという点で変数ではない。(8)はもっと分かりやすい。つまりこれも方程式という形で x の値が決まっているために変数ではない。最後に(9)であるが、なにやらいろいろ難しそうなことが書いてある。しかし結局最後で「 a の値を求めよ。」と言っているのだから、それは何か値が定まるはずである。したがって a は変数ではない。

以上のように変数とは本来、値が定まっていない数を指す。とくに前者の例(3)のように変数の値の変化が直接図形の形の変化を表していたりする場合も多い。確かに完全に形や状態が一つに定まっているような状況設定もなくはないが、多くの数学の問題では何かしら状況の様子が変化するようになっている。そしてその状況の変化の度合いを引き受けているのがまさにここで言うところの純粋な意味の「変数」なのである。

ところで、問題を解く際は自分で「文字」を設定して用いたりすることもあるだろう。このとき自分で置いたその「文字」が変数なのか変数でないのか、それを把握できていないと困るのである。だから、変数の動ける度合いである『自由度』という概念が大きな意味を持つてくるのだ。

ではそろそろ『自由度』なる単語の説明を始めることにしよう。『自由度』とは（まんまであるが）変数がどれだけ自由に動けるかという度合いを表現したものである。そこで先の例(4)を見てもらいたい。平面上では確かに Q は動けるのだが条件 $PQ=1$ という関係があるために完全に自由に動くことは許されていない。では、この場合の動点 Q の位置



を情報として表すにはどれほどの変数が必要だろうか。それには、何か基準の線分 PX を考え、ここからの角度 θ を変数として用いれば良いことが分かるだろう。

したがってこの Q の位置情報を表現するには1つの変数が必要だといえる。では、もし Q が例の条件を無視して(つまり $PQ=1$ の条件を破綻させて)動く

としたらこの点の位置情報を表すのに必要な変数はいくつになるだろうか。言うまでもない。ある二つの直交軸を定めて2つの変数 (x,y) で Q の位置を表すことは中学生の時からずっとやってきたことである。故に Q が条件で束縛されていない場合に必要な変数は2つである。以上の考察をもとにして、次のように考えることができる。つまりこうである。

『本来2つ分自由なのに「ある量が等しい」という条件を1つ課したことによって自由度が1つ減った』と。実に分かりやすい概念であるが、それをさらに一般化して次のように考える。『 x,y という二つの文字がある。これらは何も関係がない場合は2つとも自由に動けるから自由度2と呼ぼう。ところがいま x,y の間に何か関係式 $f(x,y)=0$ (*) が成り立つとする。するとこの瞬間から x,y は互いが定まったとき、もう一方が定まるという現象が起きる。つまりその変数同士の関係式(*)を用いて片方の変数を消去すれば $y=y(x)$ もしくは $x=x(y)$ とかけるはずである。そこで $2-1=1$ を条件が入った場合の自由度と呼ぶことにする。』

これはもちろん文字が増えても同じである。一般に（実はこれは完全に正しい主張ではない。後でその反例についての話もするがとりあえず今のところは認めてもらうことにしよう）文字が n 個ありそれらの等式による関係式が m 個あるとすればその自由度は $n-m$ である。これはすなわち自由に動ける変数が $n-m$ あるということを意味しているから、 n 個の文字は $n-m$ 個の変数を用いて書くことができるということである。また $n=m$ ならば自由度は0であるという事だから自由に動ける文字がない、つまり n 個の文字はすべて定まった値であるということになる。

【ここで少し補足をしておくことにしよう。もしかしたらこう考えた人がいるのではないであろうか？先の例の(8)のことである。というのも以下のように考えることができるからだ『今の話から言えば(8)に出てくる文字は1つであり、これに対して式は1つある。よって自由度は0であるから値が定まるはずである。ところがこの解は $x=-4,1$ というように、値として二つ存在してしまうため自由度は0ではないのではないか？』というものである。回答を示そう。この自由度は何も解の個数に対応しているわけではないのである。これは

他の文字が定まればその値が「どれほどがっちり定まってしまうか」という程度を表す式である。だから何個解があろうが関係はない。変数 x, y, z においてある 2 文字が定まったとする。この時条件式をみたしていろいろ変数が動こうとしても残りの文字が変化出来ない。ところがある 1 文字が定まっただけでは残りの文字はまだ変化できる。こういう状態を自由度 2 というのである。要はがっちり値が固定されてしまうまでの猶予数と言ってもいいであろう。】

では簡単な例で自由度の概念が理解できたか check しておこう。

Q 以下の[]に提示された変数の自由度を求めよ。

(1) (x, y, z) は $(1, 1, 1)$ と平行なベクトルである $[x, y, z]$

(2) x に関する n 次の整式 $f(x)$ $[f(x)$ の係数]

(3) $f(x)$ を x に関する n 次の整式であり $f(x)$ は $y = x^2 + 3x + 6$ と $x=3$ で接する。 $[f(x)$ の係数]

*(4) $\triangle ABC$ の長さは $AB=3, BC=4$ であり $\angle A = x, \angle B = y, \angle C = z$ とする。 $[x, y, z]$

$$*(5) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad [x, y, z]$$

(6) 凸 n 角形の n 個の内角について $[$ 内角の値を表す n 個の変数]

(7) 辺の長さの和が一つに定まった三角形に円が内接している。 $[$ 円の面積]

(8) 二つの単位ベクトル $(x, y, z), (u, v, w)$ は直交している。 $[x, y, z, u, v, w]$

(9) xy 平面上に直線ある。 $[$ 直線の形を一つに定めるのに必要な変数]

(10) xy 平面上に円がある。 $[$ 円の形を一つに定めるのに必要な変数]

(11) xy 平面上にある円が $x+y=2$ と $x=1, y=1$ で接する。

$[$ 円の形を一つに定めるのに必要な変数]

(12) xy 平面上にある円が $x+y=2$ と接する。 $[$ 円の形を一つに定めるのに必要な変数]

(13) xy 平面上にある円が直線と接する。 $[$ 円の形を一つに定めるのに必要な変数]

(14) xyz 空間に直線がある。 $[$ 直線の形を一つに定めるのに必要な変数]

*(15) xyz 空間に平面がある。 $[$ 平面の形を一つに定めるのに必要な変数]

*(16) xyz 空間に平面があり。原点を中心とする半径 1 の球面と接している。 $[$ 平面の形を一つに定めるのに必要な変数]

(17) xyz 空間に直線があり、原点を中心とする球面と接している。 $[$ 直線の形を一つに定めるのに必要な変数]

(18) ある定まった円と接する直線がある。 $[$ 直線の形を一つに定めるのに必要な変数]

(19) 1 辺 10cm の正方形の折り紙がある。この折り紙を内部を通る直線で 1 回折る。 $[$ できた折り紙の形を定めるのに必要な変数]

(20) 三次関数 $y=f(x), x \in \mathbb{R}$ があり、極大値が 10 である。 $[f(x)$ の形を定めるのに必要な変数]

******(21) $y=f(x)ax^3 + bx^2 + cx + d(a \neq 0)$ のグラフが

そのグラフ上の定点 $(p, f(p))$ に関して対称である。 $[a, b, c, d]$

(22) $y=f(x)$ は n 次の x に関する多項式であり、 $f(1), f(2), \dots, f(n)$ は整数である。

$[f(x)$ の形を定めるのに必要な変数]

(23) $y=f(x)$ は n 次の x に関する多項式であり、 $f(1)=1, f(2)=2, \dots, f(n)=n$ である。

$[f(x)$ の形を定めるのに必要な変数]

自由度の数を判断できるようになっただろうか？では、なぜ自由度を把握することが大切なのであろうか。この把握が持つ意味は大きく分けて二つある。というのも自由度の数は本来の自由に動ける変数の個数と等しいのである。だから、自由度が分かっているだけでいくつの条件を立式すれば良いか判断できるということでもある。たとえば先ほど例として挙げた次の問題を見てもらいたい。

「 xy 平面において、点 A は原点 O を中心とする半径 1 の円周の第一象限にある部分を動き、点 B は x 軸上を動く。ただし線分 AB の長さは 1 であり、線分 AB は両端 A, B 以外の点 C で円周と交わるものとする。

(i) $\theta = \angle AOB$ の取りうる値の範囲を求めよ。

(ii) BC の長さを θ で表せ。

(iii) 線分 OB の中点を M とするとき CM の長さの範囲を求めよ。(1982 東大)」

まず、この問題の自由度を考えよう。まずは問題文に出てくる変数の数を考える。 A, C は 2 次元上の点であるからそれぞれ 2 つずつ。 B, M は x 軸上の点であるから 1 つずつ。よって今のところ変数は 6 個である。ところがこれらの点は以下の条件で結ばれている。

① A は単位円上の点

② $AB = 1$

③ C は円上の点

④ C は線分 AB 上の点

⑤ M は OB の中点

よって $6 - 5 = 1$ が自由度の数である。(今は便宜上、上のように記したがここまで丁寧にやらなくともよい。たとえば以下のようにして考えることができる。今 A の位置を固定するとしよう。すると、 B は A を中心とした半径 1 の円と x 軸の交点だから B が定まる。その B に応じて C, M が定まる。逆に A を動かせばこれに追従して残りの点も動く。よって自由度は 1 である。) ということはこの問題の図形の形を確定するためには 1 つの変数があれば良いということである。(このとき、何を変数として設定すれば良いか、ということはかなり難しい問題であり、多少の数学的感が必要になることもある。それでも今は θ が変数として適切であろうことは火を見るより明らかである。というのも(1)で θ の範囲を求めさせて

いるだけでなく、(2)で BC の長さを θ の関数として表しているからである。簡単に言えばヒントが与えられているのだ！) 今や自由度が 1 と分かり、それに対して変数を θ とすることにしたのだから θ の値が定まれば図形の形が完全に決定する。さらにそれは図形のすべての情報が θ で表せるということでもある。

実は、このように自由度がはじめからわかっているのはかなり意味のある事である。というのも問題を解く上で自ら新たに変数を設定する際に、あたふたすることがなくなるからだ。つまり、自分で変数を設定したその瞬間から「その増やした分だけ新たな条件式を追加しなければならない」という動機づけが生まれる。より一般に、自分で追加した変数（今ヒントがなかったとして θ も自分で導入した変数であるとしよう。）の数 n に対し「 $n-1$ 個の条件式を作ろう」という発想がうまれるのである。当然自由度が m 個の問題であれば自ら設定した変数が n に対し「 $n-m$ 個の条件式を設定しよう」ということになる。後から「あっこの条件式を忘れていた！」なんてことは（実はまだこの時点では不等式や属性の条件を考えていないのであるが…）なくなる。

次にもう一つの利点であるが、上で少し述べたようにすべての情報を「自由度と等しい数の変数」を持ってして表すことができるということである。これは、自由度が m ならば m 個の変数を定めることによって完全にカタチが決まってしまうことと関係する。ただここで注意しなくてはならないのは「すべての情報を自由度と等しい数の変数を持ってして表せる」というのはあくまで理論上のことであって、高校生の範囲で、いやもっと言えば大学で学ぶ数学をもってしても、必ず表すことができるということは意味しない。たとえば次の式では確かに x, y の自由度は 0 だから変数の値が確定するのだが、実際に x を消去して値を求めることはできない。

$$\begin{cases} x^5 + 7x^4y + 8xy^3 + 2y^8 + x^4y^3 = 5 \\ x^4 + 9y^7 + 2xy^2 + 2x + x^6y^2 = 3 \end{cases}$$

それでも上の式から x, y が確定することは分かっているのである。

ところで、こんな風にごちゃごちゃして分かりにくい式であっても変数を取り直してやることでうまくいくことがある。この変数設定は実に重要な問題である。うまい変数設定をすれば相当に簡明な式になるものが、別の変数を取ることによって「全く手が付けられない」などということが起きるからである。この話は次の例で少しだけ説明する。今は本題に戻ろう。自由度が m と分かっていると m 個の変数ですべての情報を表せるということだった。その際 m 個の変数で情報を表す方法として何が考えられるだろうか。それは出てきた n 個の文字から $n-m$ 個の変数を消去することである。たしかに今回の問題のように問題文に出てきていない新たな変数を設定することで、条件の処理がうまくいくことも多いが、文字を消去するだけで進展がある場合もまた多い。たとえば数学 I で何度も解いたような以下の問題を考えてみよう。

$$\frac{y+z}{4} = \frac{2z+x}{7} = \frac{x+2y}{5} \quad xyz \neq 0 \quad \text{のとき}$$

$$\frac{x^2+2y^2+z^2}{yz+zx+xy} \quad \text{の値を求めよ。}$$

何度もやらされたような問題ではある。この問題を見て「比例式だから上式を k と置けばよい」と即座に反応した人はいないだろうか？まあ確かに間違っただけではないのだが、あまりものを考えないでパターン化するのは賢いとは言えない。もう少し深く見てみることにしよう。まず上の式である。これは変数を x, y, z として 3 つ含んでいる。ところがこれらは 2 つの等式で結ばれているのだから自由度は $3-2$ で 1 である。よって変数は 1 つあれば実質的に問題ない。つまり変数 3 つは仮の姿であって実際は変数 1 つであることと同じである。では新たな変数として x を持ってくることにしよう。するとすべきことは決まった。つまり y, z を消去すれば良いのである。上の 2 式を整理すると、

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ z = \frac{5}{4}x \end{cases}$$

これを下の式に代入すれば

$$\frac{x^2 + 2y^2 + z^2}{yz + zx + xy} = \frac{x^2 + (\frac{3}{4}x)^2 + (\frac{5}{4}x)^2}{(\frac{5}{4}x)(\frac{3}{4}x) + (\frac{5}{4}x)x + x(\frac{3}{4}x)} = \frac{50}{47} \quad \dots(\text{答})$$

このように別にわざわざ「比例式だから k とおく」ということに固執しなくても良いのである。本質は、「文字が 3 つあるが式 2 つだから変数は 1 つ」ということなのである。でもこのままだと「もやもや」が残る。今まで習ってきたのは全く意味がない事だったのか？もちろん意味がないわけではない。何故今まで「比例式は k と置く」などと習ってきたのか、その答えは簡単である。この置き換えが上で言ったところの「うまい変数のおき方」であることが多いからだ。今条件式を k と置いてみると

$$\frac{y+z}{4} = \frac{2z+x}{7} = \frac{x+2y}{5} = k$$

このとき、変数が 4 つになるが等式も 1 つ増えるためにやはり自由度は 1 つである。だからこの式の変数を k と見れば x, y, z は k で表すことができるはずである。実際に、

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = \frac{5}{4}k \\ z = \frac{11}{4}k \end{cases}$$

として求めることができる。後は先と同じようにして下の式に代入して計算すればよい。結局 k と置くのは論理的にはあまり差があることではないのである。この場合で言えば単

に計算が楽になるというだけのことに過ぎない。(それでもあまり計算量は変わらないのだが…) 結局大事なのは自由度の数という認識、そしてその余剰の変数は仮の姿であるから消してしまえば本来の変数だけが残るのだという認識である。具体的に問題をやってみることにしよう。と言ってもこれまでの範囲ではできることは限られているのでとりあえず今のところは少なめで終わらせることにしよう。

Q

(1)

(i) 下の式で表される y, z の範囲を図示せよ。

(ii) 下の式で表される z, x の範囲を図示せよ。

*(iii) 下の式で表される x, y の範囲を図示せよ。

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \leq z \leq 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

*(2)

「 xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 PQ を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。このとき a の長さを求めよ。(2004 東大)」

** (3)

半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある。

(1) $AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8$ ならば $\triangle ABC$ は鋭角三角形であることを示せ。

(2) $AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 9$ が成立することを示せ。また等号成立が成り立つのはどのような場合か。(2002 京都)

*(4)

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$a+b+c+d=0$, $ad-bc+p=0$, $a \geq b \geq c \geq d$ を満たすとき a, b, c, d を p を用いて表せ。

(2007 京都)

・ 補足

自由度は変数がどれほど自由に動けるという程度を表す数値であった。これは変数の値が確定するためには、つまり自由度が 0 となるためには、変数の数と同じだけの等式の数が必要であることを意味している。しかしながら、世の中にはやはり例外もある。というのも、属性の条件が関わることで本来解が定まらないはずのものに解が与えられることがあるからである。たとえば次の x, y の方程式をみてみよう。

$$\begin{cases} x^2 - 2axy + (a^2 - 2b)y^2 + y^4 + b^2 + c^2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ x, y, a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

今、 a, b, c はある定まった定数である。この場合、変数は 2 つあり、一方式は 1 つあるから自由度は 1 である。よって本来は解が定まらないはずなのだが…

①を変形してみよう。

① $\Leftrightarrow$

$$(x - ay)^2 + (y^2 - b)^2 + c^2 = 0 \quad \textcircled{2}$$

ここで x, y, z, a, b, c は実数であるという属性があったのであるからこの等式が成り立つために

$$\begin{cases} x - ay = 0 \\ y^2 - b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\sqrt{b} \\ y = \sqrt{b} \\ b \geq 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

が必要である。

見れば明らかなように x, y が値として求まっているではないか！この場合、変数が実数であるという条件があったが故に、1 つの等式から 2 つの等式が導かれたのだ。もしこの変数が複素数まで許されているならもちろんこのように解を導くことはできない。

ここで注目してほしいのは、実数という条件を積極的に利用するために①から②へと変形をしたことである。この変形は**実数という条件を利用しようという積極的な意思がなくでは行えない**。つまり一般化して言えば『属性の条件を利用するのにはコツがいる』ということになる。

ところで、実数という属性がこのように『等式にまで匹敵するほど強い条件』として働く例は非常に稀であるが、これが実数より強い条件、たとえば整数という条件であればこのような現象はより顕著に表れてくる。それは、前に挙げた例を思い出してみれば良いだろう。この整数という条件が『等式に匹敵するほど強い条件』としての役割を持ってくるのが「整数問題」と言われているジャンルである。この『整数』であるという属性の積極的利用は『整数問題』の章で学ぶ。