

・存在条件の処理

ここでは数学を学ぶ上で避けては通ることのできない「存在条件」の処理について学ぶ。これは後の「逆手流」の考え方の基礎になるものであるから是非ともマスターしておこう。

文字どおり「存在条件」とは”ある数”が存在する条件でのことである。この条件をいちいち言葉で書くのは面倒なので新たな記号を導入することから始めよう。

・定義

「A という条件をみたす x が存在する」という命題を以下のように書くことにする。

$$\exists x \text{ s.t } A$$

ここで s.t は **such that** の略であり $A \text{ such that } SV$ は「S が V するような A」という意味で用いられる。また $\exists$ は **exist** の略であり「何か存在する」などという意味をもっている。つまり直訳すれば『A を満たすような「存在する x 」』ということである。しかしながら、いちいち s.t を書くのは面倒なため省略されるのがほとんどである。ここでも以後はいちいち **such that** を書かない。

また条件 A,B をともに満たす x が存在すること、どちらか一方を満たす x が存在することはそれぞれ以下のように記すことにする。

$$\exists x \left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right. \qquad \exists x \text{ or } \left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right.$$

また、”ある数”が複数になっても同様でたとえば A,B を満たすような x,y が存在することを以下のように書く。

$$\exists x \exists y \left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right.$$

ところで

1 「ある x が存在しその x に対して必ず y が存在する」

2 「ある x が存在しそのうちのある x に対しては y も存在する」

この 1,2 は全く異なる命題である。実際、1 が x と y をひっくり返すと意味が違ってしまふのに対し 2 はその限りではない。そのため普通、1 の時は $\exists x \exists y$ や $\exists y \exists x$ などのように順番を変えて表現される。一方 2 は x,y の順序には関係なく、 x と y のペア、つまり (x,y) の存在を主張しているため $\exists (x,y)$ などと書ける。しかしながら(少なくとも高校生のうちは)前者の意味で用いることは稀であり、実際に必要になるのは 2 の場合がほとんどである。よっ

て以後は 1 の意味で記号を用いることはせず常に 2 の意味で用いることにしよう。つまり x と y の順序については無視し、以下で表される記号はどれも同じ意味をもつものとする：

$$\exists x \exists y = \exists y \exists x = \exists (x, y)$$

では早速本題に入ることになろう。以後は断りなしにある特別な条件をもった集合を下記のようにあらわす。

$\mathbb{R}$: 実数全体の集合 $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合 $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合 $\mathbb{N}$: 自然数全体の集合

$\mathbb{C}$: 複素数全体の集合 M_k : k の倍数の集合 M_k^j : k で割って j 余る数の集合

はじめ 5 つは広く一般に用いられている記号であるが、後ろ二つはこの場のみで用いる記号なので注意しよう。

Q 以下の命題の真偽を述べよ

(1)

$$\exists x \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(2)

$$\exists x \begin{cases} x^2 - 3x + 4 = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3)

$$\exists x \exists y \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 + 1 = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(4)

$$\exists a \exists b \begin{cases} a \notin \mathbb{Q} \\ b \in \mathbb{Q} \\ a + b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(5)

$$\exists x \exists y \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 1 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*(6)

$$\exists x \exists y \exists z \begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = -9 \\ xyz = 7 \\ x, y, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(7)

$$\exists x \begin{cases} 0 < x < -2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

これまでの問いはいずれも

$$\exists x \exists y \{ \text{「}x \text{ と } y \text{ の式」} \}$$

という形をしていて括弧の中は初めに $\exists$ で宣言された文字以外は含まれていない。そのためどんな時でも必ず真偽が1つに定まったのである。ところが以下のように x, y 以外の文字が出てきたらどうなるであろうか？

$$\exists x \exists y \{ \text{「}x \text{ と } y \text{ と } t \text{ の式」} \} \quad (*)$$

この場合 t の値によって真偽が変化しうる。もちろんどんなにうまく t をとっても x, y が存在しないかもしれないし、あらゆる数であっても存在するかもしれない。それでも一般には t によって真偽が変化するのである。

この(*)が真になるような t の条件を「 x, y の存在条件」あるいは x, y をいちいち断らないで単に「存在条件」と呼ぶ。逆に(*)が成り立たないような t の条件を x, y の非存在条件と呼ぶ。(非存在条件とはあまり用いられる言葉ではない。これもやはりこの中でのみの約束事ということにしておこう。)

Q

以下のそれぞれの命題の存在条件を求めよ。

(1)

$$\exists x \begin{cases} tx = 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(2)

$$\exists x \begin{cases} tx = 0 \\ x \in \mathbb{C} \end{cases}$$

(3)

$$\exists x \begin{cases} \frac{x}{2} \in \mathbb{Z} \\ x + 3t = 5 \end{cases}$$

(4)

$$a \in \mathbb{R} \text{とする。} \exists x \begin{cases} 0 < x < a \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(5)

$$a \in \mathbb{R} \text{とする。} \exists x \begin{cases} 0 < x < a \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(6)

$$k \in \mathbb{R} \text{とする。} \exists x \begin{cases} x^2 - 2kx + 3 = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*(7)

$$a \in \mathbb{R} \text{とする。} \exists x \exists y \begin{cases} 0 \leq x \leq y \leq 2 \\ y = -x^2 + 2x + a \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*(8)

$$a \in \mathbb{R} \text{とする。} \exists x \exists y \begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = 1 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ここまでの問題では括弧の中の変数はあらかじめ宣言された($\exists$ のついた)ものを除いて1つしかなかった。しかしこれはもちろん2文字以上でも成り立つ。この場合、存在条件はその文字からなる(当たり前のことだが初めに宣言された文字は含まれていない)条件式の集合になる。この文字が2つならば条件群を平面に描くことができるし、3つならば空間に描くことができる。さらに言えばn個ならばn次元空間に描くことができるのである。しかしながら御存知のように3次元の空間を2次元の紙面に書くことは一般には難しい。したがって入試では「3つ以上の変数の条件を図示しなければならないような問題」は自ずと出てこないことになる。実際、出題は1つか2つがほとんどである。

Q 以下の各場合について存在条件を図示せよ。

(1)

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \begin{cases} x^2 - 2ax + b = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(2)

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \begin{cases} a \leq x \leq b \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*(3)

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \begin{cases} a \leq x \leq b \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(4)

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \begin{cases} ax + b = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(5)

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \begin{cases} a \sin x + b \cos x = 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cf

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \exists y \begin{cases} ax + by = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(6)

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \begin{cases} x^2 - 2ax + b + a^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

** (7)

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \exists y \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ y = x^2 - 2ax + b + a^2 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(8) (要 3C)

$$\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ a, b > 0 \end{cases} \text{ のとき } \exists x \exists y \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \\ 1 \leq x \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(9)

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \exists y \begin{cases} x^2 - 1 = a \\ y^2 + x = b \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(10)

$a, b, c \in \mathbb{R}$ のとき

$$\exists x \exists y \begin{cases} x^2 - 2axy + (a^2 - 2b)y^2 + y^4 + b^2 + c^2 = 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(11)

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ a^2 \leq x \leq a+2 \\ b \leq x \leq b+1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

先にも述べたように括弧のなかの（宣言された文字でない）変数が 3 つ以上では紙面に書くことができないため一般には明瞭な形で図示できない。実際、(10)はかなり特殊であったから描くことができただけである。しかしながら、はじめに宣言された文字は結局最後は消えてしまうから 3 つ以上でも（少なくとも紙面に書くことが困難というレベルでの）問題はないはずである。では以下のような 3 つの文字を含む命題の存在条件はどのようにして解けば良いのであろうか。

ex

$$\exists x \exists y \exists z \begin{cases} 0 \leq x \leq y \leq z \\ x + y + z = a \\ x^2 + y = 1 \\ x, y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (**)$$

いままで解いてきた方法をこの問題に利用するのは非常に困難である。なぜなら、xyz 空間のこれらの条件を満たす領域を考えることが非常に難しいからである。それでは解くことが出来ないのだろうか？もちろんそんなことはない。そこで次に行うのは文字の存在条件を消去する方法である。(**) は初めに扱うには少し高度であるからもう少し簡単な例から入ってみることにしよう。

ex'

$$\text{命題: } \exists x \exists y \begin{cases} x + y = 3 & \dots \textcircled{1} \\ x - y = 1 & \dots \textcircled{2} \\ y \in \mathbb{R} & \dots \textcircled{3} \\ x \in \mathbb{R} & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

この命題が正しいか判断することができるであろう。もちろんできるだろう。上の 2 つの式から $x=2, y=1$ が得られるから実際に実数として x, y が存在する。つまり真である。これをもう少し丁寧に見てみよう。つまり x, y の存在条件をまとめて処理するのではなく一つ

ずつチェックしていこうということである。このように簡単な場合はまとめて処理することができたかもしれないが、世の中そんなに甘くない！解がこれほど簡単に求まるのは特別な存在なのだから。

「まとめて処理ができない」→「一つずつ無難に処理」

実に単純だが、これが大いに効果を発揮するのである。

実際に y の存在条件を処理する方法は簡単である。 y を消去すれば良いだけなのだ。つまり与えられた複数の式から y を『完全に』消去してしまうことで y の存在条件は確保される。

(ここで『完全に』と述べたが実際は消去するのに使った式そもそもはなくなるから 1 つの式を除いて完全にと述べるの正しい。) ただ、このとき y が満たすべき式すべてに代入しなくてはならないのだから当然 $y \in \mathbb{R}$ なる条件にも代入することを怠ってはならない。

実際にやってみよう。

①を用いて y を消去することにする。

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y = 3 - x \quad \dots \textcircled{1}'$$

だからこれを②③に代入すると、

$$\begin{cases} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (3 - x) = 1 \dots \textcircled{5} \\ 3 - x \in \mathbb{R} \dots \textcircled{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \dots \textcircled{5}' \\ 3 - x \in \mathbb{R} \dots \textcircled{6} \end{cases}$$

ここで⑥式は x が実数のもとでは必ず成り立つ。よって⑤'かつ⑥は結局 $x=2$ かつ④と同値となる。ここまでは y の存在条件を処理したに過ぎない。 x の存在条件とは何も関係がない。つまり元の命題はまだ終わっておらず、

$$\exists x \begin{cases} x = 2 \dots \textcircled{5}' \\ x \in \mathbb{R} \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

ここまで至ったにすぎないのだ。ところがこれは明らかで、⑤'を満たすような x (つまりは $x=2$) は④を満たすから正しいといえる。つまり元の命題は真であると結論づけられるのである。ここまで簡単な例だとありがたみが分かりにくいからいくらか演習をすることでそのありがたさを体験することにしよう。なお、ここではまだ変数変換を行うことはタブーとする。(それはつまりかたまりを意識するのはダメということである)

Q 以下のそれぞれの場合の存在条件を求めよ。

(1)

$$\exists x \exists y \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + x = t \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(2)

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ のとき } \exists x \exists y \begin{cases} x^2 - 1 = a \\ y^2 + x = b \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3)

$$\exists x \exists y \begin{cases} x + y = a \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*(4)

$$n \in \mathbb{N} \text{ のとき } \exists x \exists y \exists z \begin{cases} 0 \leq x \leq y \leq z \leq n \\ 2x + 3y = 12 \\ x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

以上の考察から xy 平面に図示して考えるのは $\exists x \exists y$ をまとめて処理しているのに過ぎなかったことがわかった。まとめて処理する方が「ラク」なのは当たり前だが着実な方法も学ばなければならない。

cf.

括弧内の等式が 1 つあるごとに次元が減る。そのため括弧内の変数が 5 つあっても 3 つ等式があれば 2 次元になってしまう。つまり平面に図示して考えることができるということだ。ところが、3 次の解の公式が（無くは無いのだが）使えないのと同様、式が複雑な場合は必ずしも文字を消去できるとは限らない。そのため数学の理論上『文字が消去』できるということと『高校生が（しかも入試時間の範囲内で）文字を消去』できるということは全く違う。つまりあまり難しいものは出来ないということになる。

ex

$$\exists \theta \begin{cases} \theta \sin \theta - \cos \theta - \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \theta = \varphi \end{cases}$$

は理論的には消去できるのだが具体的な形で θ を消去することはできない。

(大学生になっても $\theta = \arcsin \varphi$ という仮の形でしか θ は消去できない。)

・変数変換

ある文字を別の文字の条件に変換することを変数変換という。これは日ごろ行っている「文字の置き換え」のことである。この際、括弧の中の条件を変換することが正確でない人が多いので今一度整理しておくことにしよう。少しわかりにくいから具体的な例を見ていくことにする。

ex

次の命題の存在条件を求めよ。

$$\exists x \begin{cases} x^4 + 2kx^2 + 2k^2 - 3 = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (*)$$

この際、上の式では x^2 が塊になっているから $t = x^2$ と置くのが自然である。それではこれを上の式に代入して

$$\exists t \begin{cases} t^2 + 2kt^2 + 2k^2 - 3 = 0 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (**)$$

とすれば良いのだろうか？

この変形、実はまだ不十分なのである。というのも $x \in \mathbb{R}$ なる条件に代入することを忘れているからだ。たとえば(**)において $t = -3$ が解となったとき(*)が成り立つだろうか？そう $t = -3$ なら $x = \sqrt{3}i$ となってしまう $x \in \mathbb{R}$ が成り立たなくなってしまうのだ。つまり記号で表せば

$$(*) \Rightarrow (**)$$

に過ぎないのだ。正しくするならこうしなくてはならない。

$$\exists t \begin{cases} t^2 + 2kt^2 + 2k^2 - 3 = 0 \\ t \geq 0 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (***)$$

このようにして初めて $(*) \Leftrightarrow (***)$ となるのである。

Q それでは具体的な問題で変数変換の際に意識せねばならないルールを学ぶことにしよう。

(1)

(*)の存在条件を求めよ。

(2)

以下の変数変換における存在条件を求めよ。

(i)

累乗変換 $x \rightarrow x^n \ (n \in \mathbb{N})$

$$n \in \mathbb{N} \text{ とする } \exists x \begin{cases} t = x^n \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(ii)

非等長回転 $(x, y) \rightarrow \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$

$$\exists x \exists y \begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(iii)

基本対称式による変換 $(x, y) \rightarrow (x+y, xy)$

$$\exists x \exists y \begin{cases} u = x+y \\ v = xy \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(iv)

極座標変換 $(x, y) \rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2}, \arg(x, y)^*)$

$$\exists x \exists y \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(x, y) \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

* $\arg(x, y)$ とは xy 平面における点 (x, y) の x 軸からの反時計回りの偏角のことである。この際

原点 O では $\arg$ は定義しない。

cf.

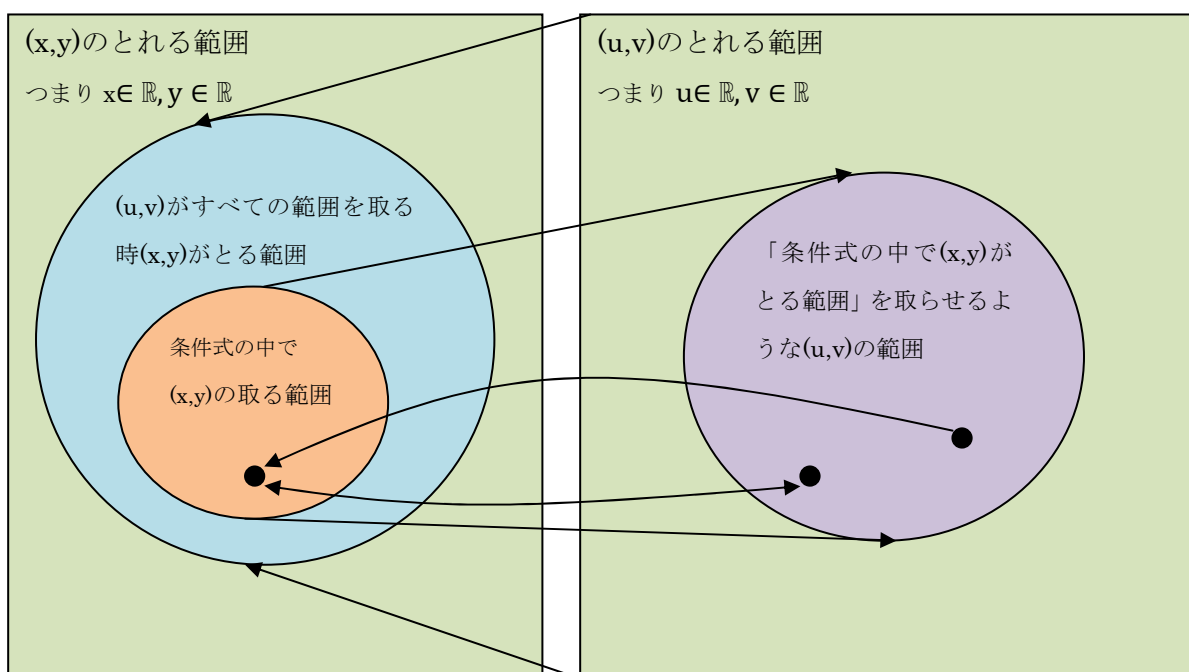
変数変換について

実は変数変換は好き勝手してもいいわけではない。今変数 (x, y) を新たな変数 (u, v) に変換するものとしよう。つまり

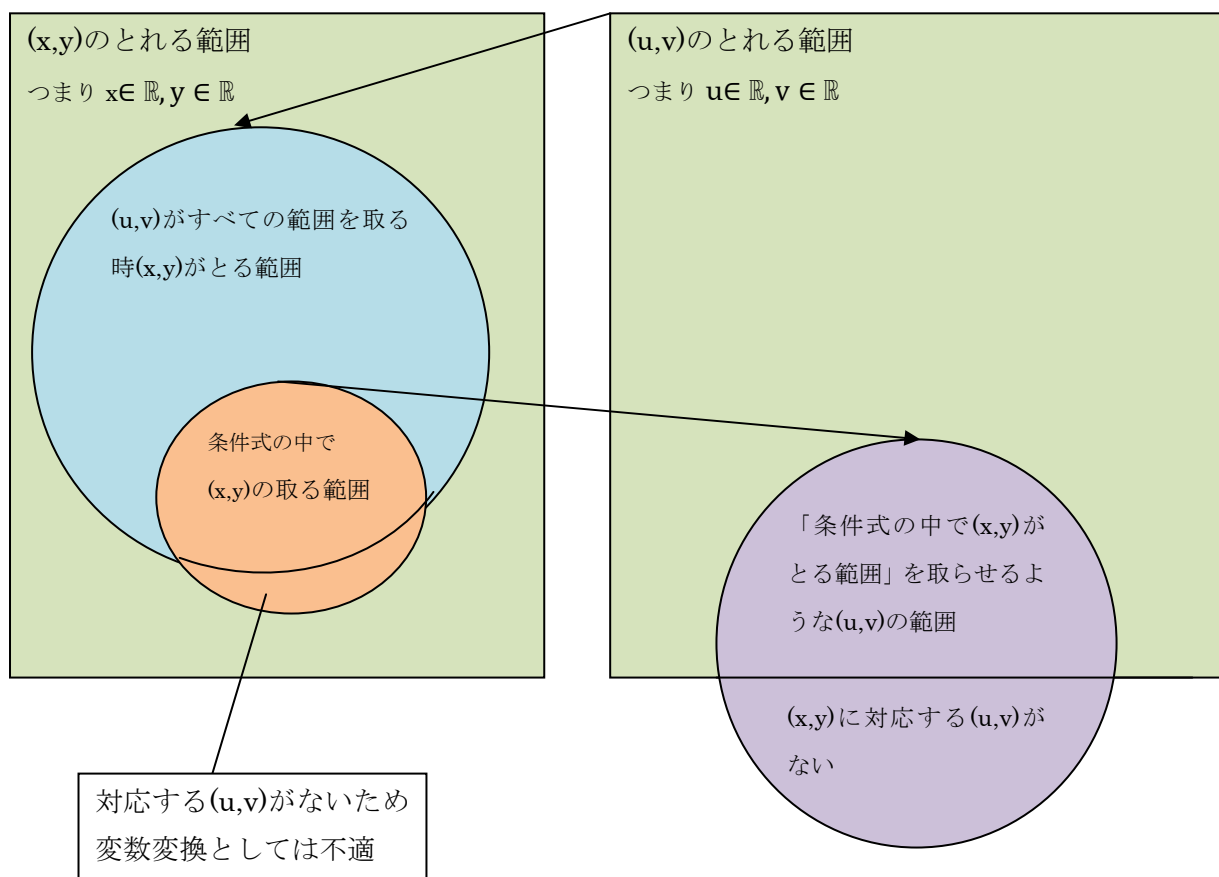
$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$$

とする。このとき変数変換が満たさなくてはならない条件がある。それは今考えている x, y の範囲、つまり x, y の取りうる変域すべてに、対応する u, v が存在することである。とりあえずでてくる文字が実数ということにして話を進めることにする。

良い例



悪い例



ex

(1)

$$\exists x \exists y \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - xy^2 = t \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (*)$$

において変数変換

$$\begin{cases} x = \cos \theta \ (\theta \geq 0) \\ y = y \end{cases}$$

は適切な変数変換ではない。

(i) 理由を説明し、適切な変換に変えよ。(hint ひとつ反例を見つけよ！)

(ii) (*) の存在条件を求めよ。

・基本対称式

先の問い(2)の(iii)ででてきた

$$x + y \quad \text{および} \quad xy$$

を二変数の基本対称式と呼ぶ。この説明をするためにまず対称式の定義をしておくことにしよう。

対称式とは出てくるどの2文字をひっくり返しても、元の値が変化しない多項式のことである。たとえば以下のようなものは対称式である。

$$x + xy + y \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x^3 + y^3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$(x-1)(y-1)(z-1)(w-1)$$

そしてもちろん上で挙げた基本対称式も対称式である。

さて、この対称式、実に面白い性質がある。というのも対称式は必ず基本対称式の組み合わせで書くことができるのだ！

たとえば上の①②ならば

$$x + xy + y = (x + y)^2 - xy$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x + y)$$

といった具合である。

なおこれはもちろん3変数以降でも成り立つ。3変数の場合の基本対称式は

$$x + y + z \quad xy + yz + zx \quad xyz$$

4変数の場合は

$$x + y + z + w \quad xy + xz + xw + yz + yw + zw$$

$$xyz + yzw + zwx + wxy \quad xyzw$$

など以後同様に続いていく。ただ、高校生のうちは3変数までの理解でほぼ十分であろう。

「対称式が基本的対称式の多項式として表せる」ということの一般的な証明は難しいが（大学で離散数学を学ばばでてくる）それでも全く未知のまま認めてしまうのも気持ち悪いから2変数の場合くらいは示しておこう。

n 次 x, y の二変数の対称式を一般に

$$f_n(x, y)$$

とあらし n に関する数学的帰納法によって証明することにしよう。

$n = 0$ の時

$$f_0(x, y) = \text{const} \quad \text{であるからこれは対称式である。}$$

そこである n があってそれ以下の n について $f_n(x, y)$ が基本対称式の多項式として表せると仮定しよう。

さて、いまあたえられた $f_{n+1}(x, y)$ という関数に対し新たに対称式である関数

$$F(x, y) \equiv f_{n+1}(x, y) - f_{n+1}(x + y, 0)$$

を考える。すると

$$F(x + y, 0) = 0$$

となるから因数定理より $F(x, y)$ は $x + y$ で割ることができる。その商つまり

$$\frac{F(x, y)}{x + y}$$

ももちろん対称式でなくてはならないが(そうでないと F は対称式でなくなってしまう!) F は定義式から $n+1$ 次以下でありさらにそれを $x+y$ で割ったのであるからこの商は n 次以下である。よってこれを f_n (あるいは n 次でないならそれを $m(< n)$ 次式として f_m とすれば良い) と書くことが許されるから、結局

$$F(x, y) = (x + y)f_n(x, y)$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(x, y) = f_{n+1}(x + y, 0) + (x + y)f_n(x, y)$$

と書くことができる。この右辺を見ると一項目の

$f_{n+1}(x + y, 0)$ は $x+y$ の関数として表されていることが分かるし二項目の

$(x+y) f_n(x, y)$ も数学的帰納法の仮定から $x+y, xy$ の多項式として表せる。

以上からすべての自然数に対し

命題：「二次の対称式は必ず基本的対称式の多項式として表せる」

は示された。

この方法と同様な考え方で 3 変数の時も示すことができる。やってみるのも良いだろう。

さて、今示した事実から対称式を基本対称式で表すことができるとわかった。そのため対称式が出てきた場合に変換

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$$

を行うのは自然な発想と言えるようにならねばならない。特に (x, y) であらわされていた時は複雑だった式も (u, v) の関係式としてみれば非常に clear なこともあるからこの変換を自由自在に扱えるようにしよう。

Q 以下の対称式群の存在条件を求めよ。

(1)

$$a \in \mathbb{R} \text{ とする。 } \exists x \exists y \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = a \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(2)

$$a \in \mathbb{R} \text{ とする。 } \exists x \exists y \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = a \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3)

$$z \in \mathbb{R} \text{ とする。 } \exists x \exists y \begin{cases} x^2 - 2zxy + y^2 = 1 \\ z + xy + 1 = 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(4)

$$a \in \mathbb{R} \text{とする。} \exists x \exists y \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = a \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

・逆手流

とうとう「逆手流」なる章に到達である。最初に言っておくと実はこれはいままでこなしてきた存在条件の処理と数学的には全く同じものである。つまり同様なことを別の見方からとらえているに過ぎないのである。それではさっそく「逆手流」なるものの説明を始めることにしよう。

「逆手流」とは『大学への数学』という雑誌で用いられている用語であり、数学の問題における 1 つのパターンに名前をつけただけに過ぎない。これはある「値域」がとりうる値を「変域の存在」という観点から補償する考え方のことである。言葉で説明しても分かりにくいから具体的な例を交えて進めていくことにしよう。

ここで新たな記号を導入する。 x がある条件 A, B をみたして動くときの取りうる値の条件を以下のように表す。

$$\downarrow_x \begin{cases} A \\ B \end{cases}$$

ここでももちろん A, B は x に関する条件を表す。

たとえば以下がその例である。

$$\downarrow_x \begin{cases} x = y + 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$$

では次の値域を求めよという問題があったとしよう。

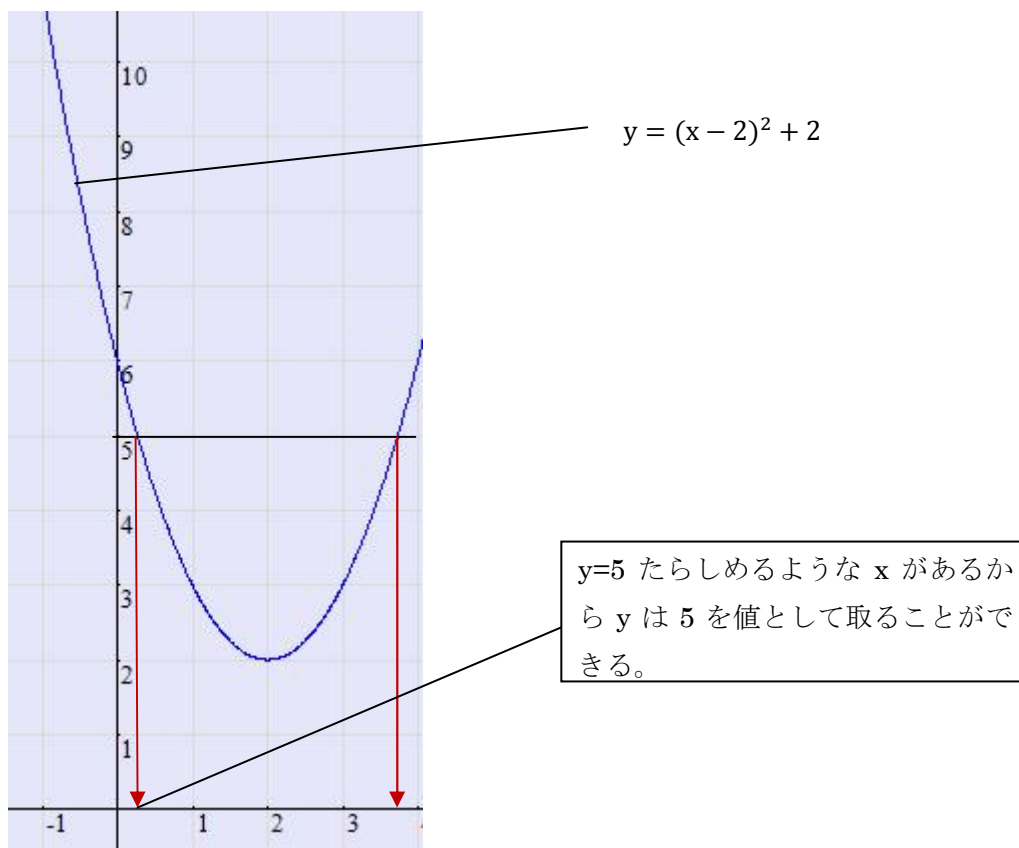
$$\downarrow_y \begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 & \text{①} \\ 0 \leq x \leq 3 & \text{②} \\ x \in \mathbb{R} & \text{③} \end{cases} \quad (*)$$

これは何のことはない数学 I で習った二次関数であるから、記号の意味が理解できれば苦勞無く答えを求めることができるであろう。

すなわち①を

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y = (x - 2)^2 + 2 \quad \textcircled{1}'$$

と変形すればこのグラフを xy 平面に描くことができる。(下図)



このグラフから x の値に応じて y がどのような値を取るかがありありと分かるであろう。しかし、これを逆手流では次のように考える。

たとえば y が 5 という値をとれるだろうか？そのために①の y に 5 を代入してみる。すると①から

$$5 = x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

となるが、このうち $x=2-\sqrt{3}$ は $0 \leq x \leq 3$ を満たす。よって $0 \leq x \leq 3$ のなかに y を 5 ならしめるような x があるから y は 5 をとれる、つまり 5 は y の値域の一部といえることができる。この $y=5$ を一般化すると次のように言える。つまり y の取りうる値とは x の存在する条件に等しいのである。式で書くと y の値域(*)は次の命題と同値なのだ。

$$\exists x \begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 & \textcircled{1} \\ 0 \leq x \leq 3 & \textcircled{2} \\ x \in \mathbb{R} & \textcircled{3} \end{cases}$$

今回の問題を別の問題に通用すれば以下のように書けるのが分かるだろう。

$$\uparrow_x \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \exists (x \text{ 以外のすべての文字}) \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\}$$

実に簡単な結果である。 x の取りうる値を求めよ、と言われればそれ以外の文字すべてを **check** し、それらの文字の存在条件をいままでと同じように求めれば良いだけなのだから。また、このとりうる値は 2 次元になっても同じである。つまり A, B という条件がある時、 x, y がとれる範囲を xy 平面に図示せよと言われたら以下のことを意味しているのだ。

$$\uparrow_{(x,y)} \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} \quad (**)$$

もちろん $(**)$ は次のものと等しい。

$$\exists (x, y \text{ 以外のすべての文字}) \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\}$$

そして今までに倣って

$$\uparrow_{(x,y)} = \uparrow_x \uparrow_y = \uparrow_y \uparrow_x$$

などと書くことにする。

では実際に問題を解いてみよう。

Q 以下の値域を求めよ。

(1)

$$\uparrow_x \uparrow_y \left\{ \begin{matrix} k^2 + 2kx + y = 0 \\ k \in \mathbb{R} \end{matrix} \right.$$

(2)

$$\uparrow_x \uparrow_y \left\{ \begin{matrix} k^2 + 2kx + y = 0 \\ |x| \leq 1 \\ k \in \mathbb{R} \end{matrix} \right.$$

* (3)

$$\uparrow_m \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta + 3} \\ \theta \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

(4)

$$\uparrow_x \uparrow_y \left\{ \begin{array}{l} y = mx + m \\ 0 \leq m \leq 1 \\ m \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

* (5)

$$\uparrow_x \uparrow_y \left\{ \begin{array}{l} x^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)y + a^2 + \frac{1}{a^2} = 0 \\ 0 < a \\ a \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

以上で『逆手流』の章も終了である。先にも行ったように『逆手流』とは存在条件を別の観点から見ているのに過ぎないから今までやってきた存在条件の問題と数学的には全く同じものである。したがって、「存在する条件を求めよ」と出題されようが「とりうる値を求めよ」、「とりうる範囲を図示せよ」と出題されようがすることは同じである。上の存在条件ででてきた問題を「逆手流の問題」としてみればどういった出題になるか一度確認してみてほしい。

それでは実際の入試問題を解いてみることにしよう。

Q

(1) xy 平面上の原点と $(1,2)$ を結ぶ線分を L とする。曲線 $y=x^2 + ax + b$ が L と共有点を持つような実数の組 (a,b) の集合を ab 平面上に図示せよ。 (2005 京都)

(2) 直角三角形に半径 r の円が内接していて三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき次の問いに答えよ。

(i) 三角形の斜辺の長さを r であらわせ

(ii) r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき、この三角形の面積の最大値を求めよ。

(1998 京都)

* (3) xy 平面上の曲線 $C : y=x^3$ 上の点 P における接線を、 P を中心にして反時計回りに 45° 回転して得られる直線を L とする。 C と L が相異なる三点で交わるような P の範囲を図示せよ。(2001 京都)

(4)点 O を原点とする座標空間の 3 点を $A(0, 1, 2), B(2, 3, 0), P(5+t, 9+2t, 5+3t)$ とする。
線分 OP と線分 AB が交点を持つような実数 t が存在することを示せ。またそのとき交点の
座標を求めよ。(2006 京都)

*(5) p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件
 $a+b+c+d=0, ad-bc+p=0, a \geq b \geq c \geq d$ を満たすとき a, b, c, d を p を用いて表せ。
(2007 京都)

京都の問題しかないのはそれしか調べていないからである！(笑)それでも 1 つの学校だけでも
これだけの数の「存在が絡んだ問題」が出ていることが分かるだろう。