(1)
$f(x)=px^2$ とおくと
l 上に格子点が a 個あるためには $x=1,2,,,a-1,a$ における $f(x)$ の値、つまり
$f(1),f(2),,,,,f(a-1),f(a)$ が整数にならなくてはならないが、
（格子点であるためには x 座標が整数であることが必要なので
l 上の格子点の候補として $f(1),f(2),,,,f(a)$ しか考えられないからである。）
特に $f(1)=p$ が整数であるという条件から p が整数でなくてはならない。
逆に p が整数であれば $f(2),,,,,f(a-1),f(a)$ が整数であることは明らかである。
よって求める必要十分条件は p が整数であることである。
(2)
l 上の格子点が $a-1$ 個であると仮定すると
$f(1),f(2),,,,f(a)$ のうちいずれか１つのみが整数ではないことになる。
ここでもし $f(1)=p$ が整数であるとすると (1) で考えたように l 上には a 個
の整数が存在してしまうので不適。
したがって $f(1),f(2),,,,f(a)$ のうちで唯一整数でないのは $f(1)$ である。
逆にいえば $f(2),f(3)$ は整数であるとして良いから
$f(2)=4p$
$f(3)=9p$
は整数である。これらを見やすくするために整数 m,n を用いて
$f(2)=m,f(3)=n$ と書くことにする。p が整数でないことを考えれば
$p=\dfrac{m}{4}=\dfrac{n}{9}$ 　から m は 4 の倍数でなく、n は 9 の倍数でないことになる。
ところでこの式から $9m=4n$ が導かれるが、4 と 9 は互いに素であるから
n は 9 の倍数でなければならず、同時に m も 4 の倍数でなくてはならない。
これは上で述べたことに矛盾する。
したがって「l 上の格子点が $a-1$ 個である」というのは誤りであるといえる。
（注）上で $f(2),f(3)$ を用いて証明を試みたが、もちろん $f(3),f(4)$ 等の組み
合わせを用いても同様の議論を展開することができる。
しかしながら今 a は「3 以上の整数である」という問題文の仮定があるので
例えば $a=3$ のときなら $f(4)$ が定義されなくなってしまう。
逆にいえば「a が３以上の整数である」という条件の重さはその程度の意味
でしかないといえる。それでも a が 2 では反例が存在してしまうため不適である。
（例えば $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の時。）