

2

(1)

$P = (x, y, z)$ とする。 P は H 上の点だから

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots [1]$$

このとき

$$\begin{aligned} L &= \overline{PR_1}^2 + \overline{PR_2}^2 + \overline{PR_3}^2 + \overline{PR_4}^2 \\ &= (x-1)^2 + y^2 + z^2 + (x+1)^2 + y^2 + z^2 \\ &\quad + x^2 + (y-1)^2 + z^2 + x^2 + (y+1)^2 + z^2 \\ &= 4(x^2 + y^2 + z^2) + 4 \\ &= 8 = \text{一定} \quad (\leftarrow [1] \text{ を用いた。}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(2)

コーシーシュワルツの不等式から

$$\begin{aligned} &(\overline{PR_1}^2 + \overline{PR_2}^2 + \overline{PR_3}^2 + \overline{PR_4}^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \\ &\geq (\overline{PR_1} \cdot 1 + \overline{PR_2} \cdot 1 + \overline{PR_3} \cdot 1 + \overline{PR_4} \cdot 1)^2 \cdots [2] \end{aligned}$$

が成り立つが、 $L = 8$ であること、 $m > 0$ であることから

$$[2] \Leftrightarrow L \cdot 4 \geq m^2 \Leftrightarrow m \leq 4\sqrt{2} \text{ と言える。}$$

等号成立は

$$\frac{\overline{PR_1}}{1} = \frac{\overline{PR_2}}{1} = \frac{\overline{PR_3}}{1} = \frac{\overline{PR_4}}{1} \Leftrightarrow \overline{PR_1} = \overline{PR_2} = \overline{PR_3} = \overline{PR_4} \text{ のときであるが}$$

これは P が $(0, 0, 1)$ に一致するときに成立する。

(3)

コーシーシュワルツの不等式から

$$\begin{aligned} &(\overline{PR_1}^2 + \overline{PR_2}^2 + \overline{PR_3}^2 + \overline{PR_4}^2)(1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2) \\ &\geq (\overline{PR_1} \cdot 1 + \overline{PR_2} \cdot 2 + \overline{PR_3} \cdot 1 + \overline{PR_4} \cdot 2)^2 \cdots [3] \end{aligned}$$

が成り立つが、 $L = 8$ であること、 $n > 0$ であることから

$$[3] \Leftrightarrow L \cdot 10 \geq n^2 \Leftrightarrow n \leq 4\sqrt{5} \text{ と言える。}$$

等号成立は

$$\frac{\overline{PR_1}}{1} = \frac{\overline{PR_2}}{2} = \frac{\overline{PR_3}}{1} = \frac{\overline{PR_4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \overline{PR_1} = 2 \cdot \overline{PR_3} = \overline{PR_2} = \overline{PR_4} \text{ のときであるが}$$

$$\text{これは } P \text{ が } \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{\sqrt{7}}{5}\right) \text{ に一致するときに成立する。}$$

注

解答では(2),(3)に於いて $\overline{PR_1}$ から $\overline{PR_4}$ までの長さの比がわかった直後、すぐさま P の座標を提示している。このとき、 P の座標を求めるまでのプロセスはどのようなになっているのだろう、と思うかもしれない。たしかにいきなり答えは「これこれですよ」と言われてしまのは余りに厳しいというものだ。だからここで補足しておくことにしよう。まず(2)の場合だがこれは図形的な性質に着目すれば明らかであろう。

R_1, R_2, R_3, R_4 全てから等しい距離にある点であり、かつ球面 H 上にある点が $(0, 0, 1)$ であることは図形を描いてみればすぐにわかることである。

問題なのは(3)の方である。まず最初に着目すべきなのは平面 $x = y$ に関する対称性である。これは $(R_1, R_3 \text{ からの距離}) : (R_2, R_4 \text{ からの距離}) = 1 : 2$ であるという関係から容易に理解することができる。

さて、ここまでくれば P が平面 $x = y$ に存在しなければならないことが分かる。すると、ある実数 t を用いて P は $P = (t, t, z)$ とおくことができる。

ただし平面 H 上の点であるから $t^2 + t^2 + z^2 = 1$ の条件を忘れてはならない。

このようにしておいた P に対して $2 \cdot \overline{PR_1} = \overline{PR_2}$ の関係式を処理すれば、 $t = \frac{3}{5}$ を導くことができる。実際に計算してみてほしい。

以上のようにして確かに P の座標を求めることができたが、そもそもこれは回答に書かなくても良いことなのか？と突っ込みを入れたくなるかもしれない。結論を示そう。「計算ミスをしてしまうことを考慮して最悪部分点を取りたい」というのなら書くべきである。しかし、提示した P をもってすれば確かに等号が成立するのだから、いきなり答えを提示しても数学的に論理破綻がない以上書いていなくても誰も文句は言えないのである。つまりプロセスを書いていないことに起因する減点はないはずである。

少なくともまともな採点官ならね... (汗

研究

(3)の条件を少しゆるくする。つまり

$$\overline{PR_1} = \overline{PR_3} \quad \text{かつ} \quad \overline{PR_2} = \overline{PR_4} \quad (*)$$

の長さの比が2であるという条件を取り払うことにする。さて

$$u = \overline{PR_1} = \overline{PR_3} \quad v = \overline{PR_2} = \overline{PR_4} \quad \text{とし}$$

$\frac{v}{u}$ の値がどのような範囲にある場合に P は H 上に存在できるか考えてみよう。

逆にいえば P が H 上を $(*)$ を満たして動く時 $\frac{v}{u}$ はどのような値をとることができるであろうか。これは答えのみを記しておくことにしよう。

$$\sqrt{2} - 1 \leq \frac{v}{u} \leq \sqrt{2} + 1 \cdots (\text{答})$$