

3

0 以上の自然数 n に対し関数列 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_n(x) = \begin{cases} n \leq x < n+1 & \text{のとき} \quad \frac{1}{(n+1)x+a_n} \\ x < n \text{ or } n+1 \leq x & \text{のとき} \quad 0 \end{cases}$$

ただし数列 a_n は $a_0 = 0$ のもとで、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

が $x > 0$ で連続になるようにとるものとする。

このとき次の問いに答えよ。

- (1) $0 < x$ なる x に対し $f(x) \geq 0$ が成り立つことを示せ。
- (2) $N > 1$ なる実数 N に対し xy 平面上で $x = 1, x = N, y = f(x), x$ 軸で囲まれる部分の面積を S_N とする。

このとき $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N < 4$ が成立することを示せ。

ただし $0 \leq x$ なる x に対し

$\log(x+1) \leq x$ が成り立つことは証明無しで用いてよい。