$\boxed{3}$

(1)

まず a_n を求める。a_n は $f(x)$ が連続になるように定義されたのだから $n = 0, 1, 2, , ,$ に対し次の式が成り立つ。

$$\lim_{x \to n+1-0} f(x) = \lim_{x \to n+1+0} f(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to n+1-0} f_n(x) = \lim_{x \to n+1+0} f_{n+1}(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to n+1+0} \frac{1}{(n+1)x + a_n} = \lim_{x \to n+1-0} \frac{1}{(n+2)x + a_{n+1}}$$

$\Leftrightarrow (n+1)(n+1) + a_n = (n+2)(n+1) + a_{n+1}$

$\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n - (n+1)$

これは階差数列だから簡単に解けて $n \geqq 1$ に対し

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} -(k+1) = -\sum_{k=1}^{n} k = -\frac{n(n+1)}{2}$$ が成り立つ。

しかしこれは $n = 0$ でも正しい。

さてこのとき

$$f_n(x) = \frac{1}{(n+1)x + a_n} = \frac{1}{(n+1)x - \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{(n+1)}(x - \frac{n}{2})^{-1}$$ であるが

$n < x \leqq n+1 \Rightarrow (x - \frac{n}{2}) > (n - \frac{n}{2}) = \frac{n}{2} > 0$ であるから

任意の n に対し $f_n(x) > 0$ が成り立つ。

したがって

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \geqq 0$$ が言える。■

（ここで等号がどうして入るのか気になるかもしれないが今は余り気にしなくともよい。もし気になるのなら大学で $\epsilon - \delta$ 論法を学んだあと見直してもらいたい。）

(2)

(1) より $x > 0$ では $f(x) \geqq 0$ が成り立つから $f(x)$ は右図のようになる。

（ここでは単調減少性は示していないから必ずしも右のようになるとは限らないが、以下の議論では $f(x)$ が負にならないという情報だけで十分である。）

したがって

$$S_N = \int_1^N f(x)dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)x - \frac{n(n+1)}{2}} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{1}{n+1} log\{(n+1)x - \frac{n(n+1)}{2} \right]_n^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{1}{n+1} log \frac{(n+1)(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}}{(n+1)n - \frac{n(n+1)}{2}} \right] = \sum_{n=1}^{N-1} \{ \frac{1}{n+1} log \frac{n+2}{n} \}$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \{ \frac{1}{n+1} log(1 + \frac{2}{n}) \} \quad (\star)$$

ここで問題文の等式から $\frac{2}{n} > 0$ ゆえ

$log(1 + \frac{2}{n}) \leqq \frac{2}{n}$ がすべての n に対しなりたつ。これを $(\star)$ に代入すると、

$$\sum_{n=1}^{N-1} \{ \frac{1}{n+1} log(1 + \frac{2}{n}) \} \leqq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n} < 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \quad (\star\star)$$

ここで

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = (\frac{1}{1^2}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}) + \cdots +$$

$$< (\frac{1}{1^2}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}) + (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}) + (\frac{1}{8^2} + \cdots) + \cdots$$

$= 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ が成り立つ。したがって $(\star\star)$ に戻ると

$$\sum_{n=1}^{N-1} \{ \frac{1}{n+1} log(1 + \frac{2}{n}) \} < 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 4$$

したがって

$$\lim_{N \to \infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \frac{1}{n+1} log(1 + \frac{2}{n}) \} < 4 \qquad \blacksquare$$

注

解答中で示した式

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$ であるがこれはあまりにも有名であるからヒントとして与えなかった。

この式を思いつくことができなかった人は良く復習しておいてほしい。

なおこの左辺 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6489 \cdots$ に収束することが知られており

かの天才数学者オイラーが初めて示したといわれている。これが $\frac{\pi^2}{6}$ に収束

することを高校生の知識で証明するのはかなり困難である。

（プラチカ　C の付録で高校生の範囲で証明を試みていた気がしなくもない）