

4

行列 A_n を次の規則で定める。

$$(i) \quad A_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad A_{n+1} = C_n A_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{ただし } C_n \text{ はさいころをふって } 1, 2 \text{ が出たら } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3, 4 \text{ が出たら } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 5, 6 \text{ が出たら } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶという約束で定める行列の列であるとする。

例えばさいころの目が $2, 5, 5, 4, \dots$ のように出た場合は

$C_0 = P, C_1 = D, C_2 = D, C_3 = N, \dots$ といった具合である。

さいころの出る目が出る確率は同様に確からしいとして次の問いに答えよ。

(1)

さいころの目がどのように出ても実数 a, b を用いて

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ のようにかけることを示せ。}$$

(2)

$$A_8 = \begin{pmatrix} 128 & 16 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる確率を求めよ。}$$

(3)

n を 2 以上の整数であるとする。このとき

$$A_n = \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる確率を求めよ。}$$