$\boxed{4}$

(1)

全ての自然数に対しあらゆる A_n が $A_n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のようにかけることを数学的帰納法を用いて示す。

$n=0$ のときは A_0 の形を見れば明らかに成立している。

そこである n に対し $A_n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とかけるとする。

このとき A_{n+1} の候補として PA_n, NA_n, DA_n の3通りが考えられるが
それぞれの成分を計算すると

$$PA_n = \begin{pmatrix} a & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots [1]$$

$$NA_n = \begin{pmatrix} a & b-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots [2]$$

$$DA_n = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots [3]$$

となりいずれも $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形をしている。よってすべての n に対し

A_n は $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ という形でかける。 ■

(2)

式 [1], [2], [3] から

P は1行2列の数に1を加える行列
N は1行2列の数から1を除く行列
D は1行1列と1行2列を2倍する行列

であることが分かる。ここで行列 P, N は1行1列の値に影響を与えないから
$A_8 = C_7C_6C_5C_4C_3C_2C_1C_0E$ に現れる数列 C_0〜C_7 のうち D の現れる数を
p とすると A_8 の1行1列の成分 $= 2^p$ となる。
したがって $2^p = 128 \iff p = 7$
よって8つの行列 C_0〜C_7 のなかで D でないものは1つである。
言い換えればその1つは P, N のどちらかということになる。
さてその1つが C_k であるとすると [1], [2], [3] を考慮して

$$A_8 = C_7C_6\cdots C_k\cdots C_1C_0E = DD\cdots C_k\cdots DDE = DD\cdots C_k \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= DD\cdots \begin{pmatrix} 2^k & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{7-k}\cdot 2^k & \pm 2^{7-k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^7 & \pm 2^{7-k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 128 & \pm 2^{7-k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ただし複合は C_k が P のときは $+, N$ のときは-をとるものとする。これが
$\begin{pmatrix} 128 & 16 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるためには $C_k = P$ で $k = 3$ でなくてはならない。

以上からさいころは $C_3 = P, C_1 = C_2 = C_4 = \cdots = C_7 = D$ となるような
結果にならなければならないことがわかる。
したがって求める確率は

$(\frac{1}{3})^8 = \frac{1}{3^8}$ $\cdots$ 答

(3)

(2) の考察と同様に考えれば A_n の 1 行 1 列の成分は 2 の累乗になっておりその
指数は C_0〜C_{n-1} のうち D が現れる階数を表している。したがって
$A_n = \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるためには C_0〜C_{n-1} のうち D が $n-2$ 個、それ以外、

つまり P, N が 2 個含まれていることが分かる。
さて、その 2 個が 2 つとも P であるとすると行列の 1 行 2 列はあるところで
正になるがこれは D を何回作用させても 0 になることはないから不適。
同様にして 2 つとも N のときも不適である。
以上から D 以外の 2 つは P, N の 1 つずつとしてよい。
それではある k に対し $C_1 = C_2 = \cdots = C_{k-1} = D, C_k = P$
であったとし、その直後、$C_{k+1} = D$ であったとしよう。
このとき (2) と同様に考えると、
A_{k+1} の 1 行 2 列の成分 $= 1 \ \rightarrow \ A_{k+2}$ の 1 行 2 列の成分 $= 2$ となるが
この成分はそののち N をいかなる時点で作用させても 0 になることがない。
よって P の後には N しか取れないことになる。このとき

$$A_n = C_{n-1}\cdots C_{k+1}C_k\cdots C_1C_0E = DD\cdots DNPD\cdots DDE = DD\cdots DNP \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= DD\cdots DN \begin{pmatrix} 2^k & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = DD\cdots D \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-k-2}\cdot 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって k の値によらず条件を満たす。
P と N を交換しても同じ議論が展開できる。

さて、

D $\cdots$ $n-2$ 個

$(PN$ のカタマリ$)$ $\cdots$ 1 個

の並び変えの組み合わせとしてこのような場合の数は
$2\cdot {}_{n-1}C_1$ であるから（2 は P,N の並べ替えから生まれる因子である）
これが同様に確からしいことを考えれば求める確率は

$2\cdot\frac{{}_{n-1}C_1}{3^n}=\frac{2(n-1)}{3^n}$ $\cdots$ 答