$\boxed{5}$

$y = x^3 - x \ \cdots\ [1]$

P を通る直線 l は傾きを m として

$y = m(x+2) - 6 \ \cdots\ [2]$ とおける。

[1], [2] から y を消去すると

$x^3 - x = m(x+2) - 6 \iff (x+2)(x^2 - 2x - m + 3) = 0 \ \cdots\ [3]$

[3] の解は [1], [2] の交点の x 座標を表しているから C と l が 3 点で交わる条件は

$(x+2)(x^2 - 2x - m + 3) = 0$ が $-2 \leqq x \leqq 2$ に 3 解をもつことである。

$x + 2 = 0$ の解は $x = -2$ であることを考慮すると

$x^2 - 2x - m + 3 = 0 \ \cdots\ [4]$ が $-2 < x \leqq 2$ に 2 解をもてばよい。

[4] の左辺を $f(x)$ とおくと $f(x) = 0$ が $-2 < x \leqq 2$ に 2 解をもつ条件は

軸の x 座標 1 が $-2 < x \leqq 2$ に含まれていることを考えると

$$\begin{cases} \text{判別式 } D/4 > 0 \\ f(-2) > 0 \\ f(2) \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1^2 - (-m+3) > 0 \\ 11 - m > 0 \\ 3 - m \geqq 0 \end{cases} \iff 2 < m \leqq 3 \ \cdots\ [5]$$

m が [5] を満たして動くときの [4] の解を α, β $(-2 < \alpha < \beta \leqq 3)$ とする。

すると解と係数の関係より α, β は

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = 3 - m \end{cases} \ \cdots\ [6]$$

をみたす。さて、このとき考えている領域の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{\alpha} y_c - y_l dx + \int_{\alpha}^{\beta} y_l - y_c dx + \int_{\beta}^{2} y_c - y_l dx \\ &= \int_{-2}^{\alpha} (x+2)(x^2 - 2x - m + 3) dx + \int_{\alpha}^{\beta} -(x+2)(x^2 - 2x - m + 3) dx \\ &\quad + \int_{\beta}^{2} (x+2)(x^2 - 2x - m + 3) dx \\ &= \int_{-2}^{2} (x+2)(x^2 - 2x - m + 3) dx - 2\int_{\alpha}^{\beta} (x+2)(x^2 - 2x - m + 3) dx \\ &= \int_{-2}^{2} (x+2)(x^2 - 2x - m + 3) dx - 2\int_{\alpha}^{\beta} (x+2)(x-\alpha)(x-\beta) dx \qquad (\star) \end{aligned}$$

ここで $(\star)$ の一項目の被積分関数

$= (x+2)(x^2-2x-m+3) = (x+2)\left\{(x+2)^2-6(x+2)-m+11\right\}$

$= (x+2)^3-6(x+2)^2+(11-m)(x+2)$　であるから一項目の積分は

$$\int_{-2}^{2}(x+2)^3-6(x+2)^2+(11-m)(x+2)dx$$

$$= \left[\tfrac{(x+2)^4}{4}-2(x+2)^3+\tfrac{(x+2)^2}{2}(11-m)\right]_{-2}^{2} = 24-8m \ \cdots [7]$$

次に２項目の積分であるが、これを求めるために次の公式を示しておく。

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)dx = -\frac{(\beta-\alpha)^4}{12} \ \cdots \ (A)$$

以下、(A) の証明は部分積分（３Ｃ）の知識を用いているが文系の知識を用いても示すことは容易である。とどのつまり全部展開して計算を行えばよいのである。しかしながらそれでは芸がないので以下のように解答を作成することにした。なお注として覚えておくと便利な公式を記しておいたので是非参照されたい。

(A) の証明：

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)dx = \int_{\alpha}^{\beta}(\frac{(x-\alpha)^3}{3})'(x-\beta)dx$$

$$= \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}(x-\beta)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x-\alpha)^3}{3}dx$$

$$= -\left[\frac{(x-\alpha)^4}{12}\right]_{\alpha}^{\beta} = -\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

(A) の証明終わり ■

二項目の被積分関数は

$= (x-\alpha+2+\alpha)(x-\alpha)(x-\beta) = (x-a)^2(x-\beta)+(2+\alpha)(x-\alpha)(x-\beta)$

であることよりこの積分は (A) を用いると

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x+2)(x-\alpha)(x-\beta)dx = \int_{\alpha}^{\beta}(x-a)^2(x-\beta)+(2+\alpha)(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}(x-a)^2(x-\beta)dx+(2+\alpha)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= -\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}-(2+\alpha)\frac{(\beta-\alpha)^3}{6} = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}(\alpha+\beta+4) \ \cdots \ [8]$$

ここで [6] を用いると

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2\sqrt{m-2}$ であるから [8] の値は

$-\dfrac{8(m-2)\sqrt{m-2}}{12}(2+4)=-4(m-2)\sqrt{m-2}\ \cdots$ [9] となる。

さて $(\star)$ にもどって [7], [9] を用いると

$S=24-8m+8(m-2)\sqrt{m-2}$

これが [5] の範囲 $2<m\leqq 3$
でどのような値をとるかを考えればよい。そこで $t=\sqrt{m-2}$ とおくと
t の取りうる値は $0<t\leqq 1$ であるがこのとき $m=t^2+2$ ゆえ

$S=24-8(t^2+2)+8t^3=8(t^3-t^2+1)$

これを t で微分すると

$\dfrac{dS}{dt}=8(3t^2-2t)=24t(t-\dfrac{2}{3})$ であるから増減表がかける（略）

以上から $t=\dfrac{2}{3}$ のとき S は最小値

$S_{min}=\dfrac{184}{27}$ をとる。

$\boxed{\text{注}}$
今回の出題コンセプトは計算力である。問題そのものは難しくないのだが
いかんせん計算が複雑であり完答するのは難しかったであろう。さて、
解答中に出てきた数々の積分であるが次の公式を知っていると計算を
より早く正確に行うことができる。

$P(x)$ を**３次以下の多項式**とするとき次の式が常に成り立つ。

$$\int_{\alpha}^{\beta}P(x)dx=\frac{\beta-\alpha}{6}\left[P(\alpha)+P(\beta)+4P(\frac{\alpha+\beta}{2})\right]$$

あまり有名な公式ではないが時と場合によっては相当便利な公式である。
とくに時間がシビアなセンター試験などでは役に立つことも多い。
例えば (A) を示したいのなら
$P(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ とすれば

$$\int_{\alpha}^{\beta}P(x)dx=\frac{\beta-\alpha}{6}\left[P(\alpha)+P(\beta)+4P(\frac{\alpha+\beta}{2})\right]$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{6}4(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha)^2(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta)=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

として簡単に求めることができる。
証明は特に $P(x)$ として $1,x,x^2,x^3$ の時成り立つことを示せばよい。
なぜなら $P(x)$ はこれらの和としてかけるからである。

しかし強調しておかなければならないのは
$P(x)$ が **3 次以下の多項式**のときのみに成り立つということである。
もちろん一般の関数に関しては成り立たないので間違えることのないように！